6

不正事例のまとめ(仮)

2020.02.10

2018年3月20日

公認会計士　山内眞樹

内容は、主に日本公認会計士協会のCPA全国夏季研修で受講した不正事例を、参考図書等も加えてまとめたものです。

自分の今までの仕事での経験、監査法人就職当初の経験、沖縄での実務の経験を加味しております。

その他の参考図書等
(1) 会計不正と粉飾決算の発見　2017.7 松澤綜合会計事務所
(2) 企業不正対応の実務　2011.10 日本不正検査士協会編
(3) 不正調査ガイドライン　2015.1 日本公認会計士協会編
(4) CAAT　エクセルによる不正発見

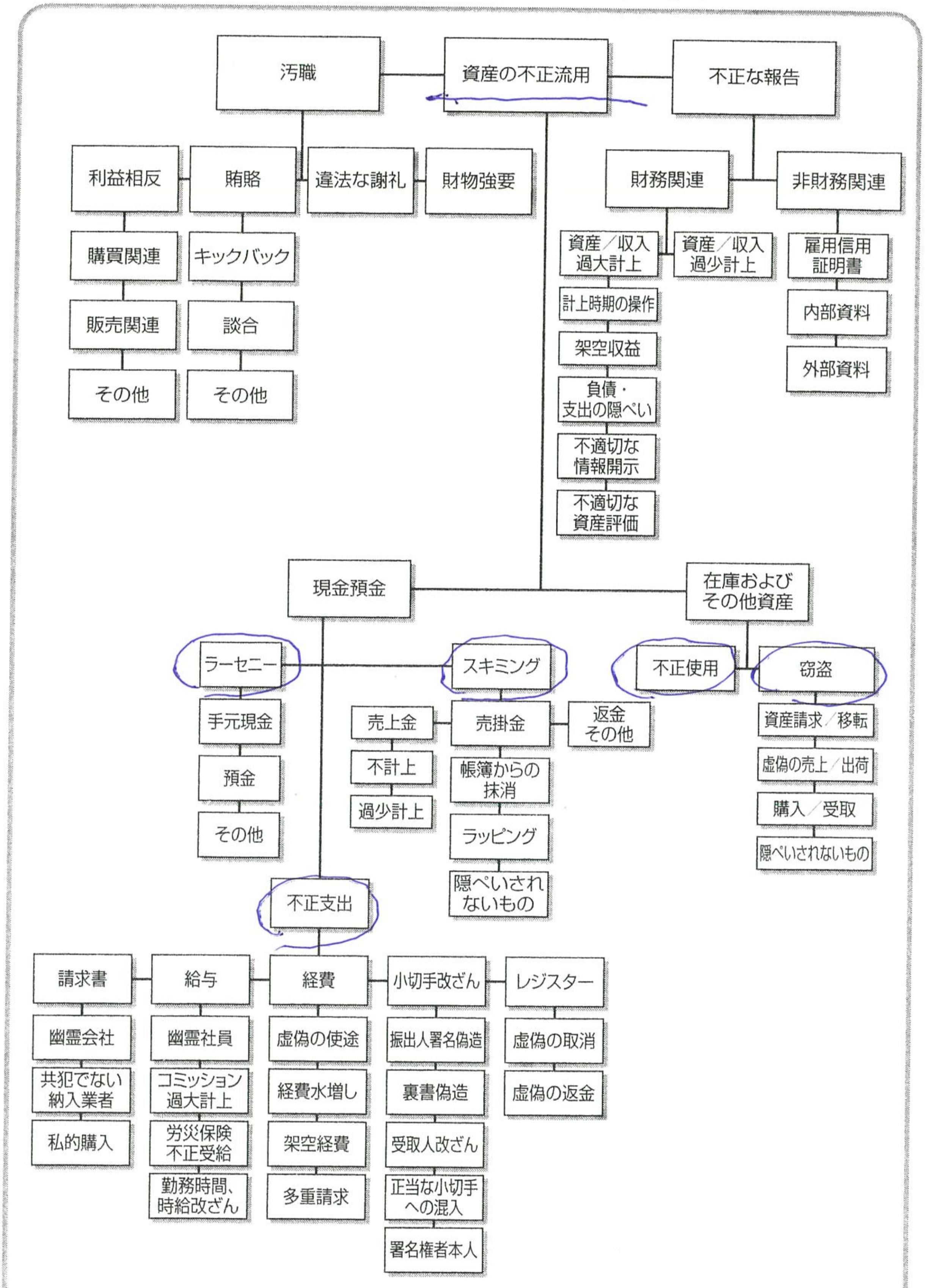
不正調査の基礎

デジタルフォレンジックの活用

鉄則などはあるか。現実の資料、証拠は散逸している

48

▶不正の体系図「フロード・ツリー」◀



出所：不正検査士マニュアル2010年版

(企業不正対応の実務 39頁)

原因：茶色
対策：青色

Ⅰ. 不 正 の 態 様

(上場会社等の例)

2018.03.07
2018.02.13
2017.09.11
2017.08.25

不正の態様

(1) **ラーセニー**：窃盗罪を示す法律用語。組織体の会計**帳簿に記帳済み**の現預金を横領・着服。**(記帳後)**

(2) **スキミング**：組織体の会計帳簿に**未記帳**の現預金を横領・着服。**(記帳前)**

(3) **不正支出**：請求書、給与、経費精算によって会社の資金を不正に支出する。
①請求書(偽造)不正→支払
②**架空**人件費→支払
③**私的経費**を会社負担へ

(4) **在庫その他資産横領**：会社の保有する在庫等の資産を**外部に**持ち出し、不当に転売する。

方法等

(私消・証憑の偽造・改ざん等)

(1) 単純な横領・着服のケースもあるが、これを隠ぺいするために会計記録の改ざんや証憑書類の偽造を伴う場合がある。

(2) このような場合には、横領・着服とあわせて、架空の仕入計上、経費計上、架空の在庫・原価の計上が行われているケースが多い。

不正関与者

(1) 会社の従業員レベルに多くみられるが、経営者が実行者となるケースもある。

(2) 経営者が実行者となる場合には数千万円～数億円規模の大規模な不正となることが多い。

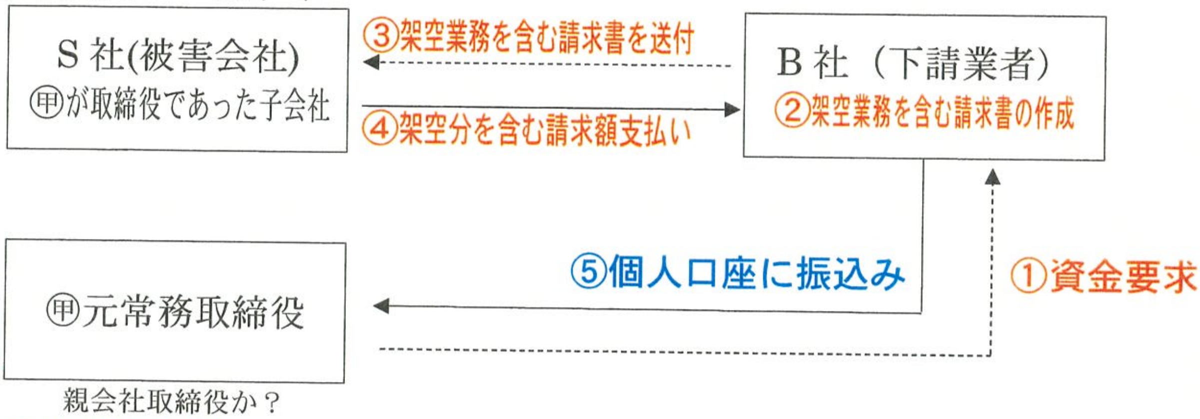
	記帳後(ラーセニー)	記帳前(スキミング)	不正支出等
改ざん 偽　造	(1) 会計記録の改ざん (2) 証憑書類の偽造		(1) 請求書偽造 (2) 計算書偽造
架　空 計　上		(1) 入金事実の除外 (2) 架空借入と支払 (3) 架空仕入と支払	(1) 収入除外 (2) 架空人件費 (3) 架空経費
不　正 横　領			(1) 私的経費を会社付替 (2) 記録済現預金の流用 (3) 在庫、会社財産の横領 (4) 現預金の借用、流用

1．下請業者の上乗せ請求を通じた横領

(1) 概　要

発覚の経緯	国税局による調査・指摘、子会社の反面調査、親会社の支出等相互不一致
不正実行者	経営者（親会社執行役員 兼 子会社取締役）
関与形態	外部共謀（経営者と下請業者）
発生エンティティ	国内連結子会社
影響金額	約５年間にわたり、総額約600百万円

(2) 不正スキーム (一)



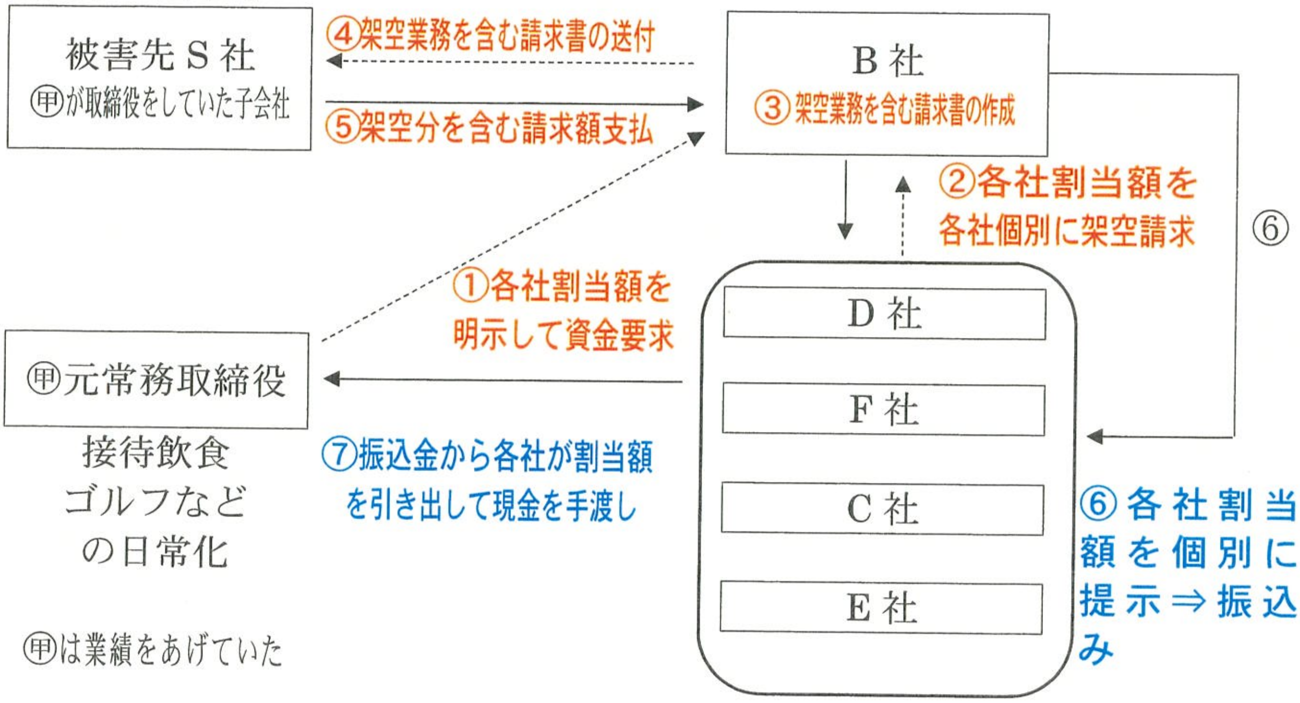
㊙元常務取締役は、取引先に対して「B社には無理させて業務を請けてもらっており、そのためB社が購入したトラック等の支払いについて補てんをしている」と説明

㊙元常務取締役は、B社に対して、商品配送事故に関する支払の穴埋めをしなければならないとして、その資金をS社社長に要求

コラム	インタビュー

(1)インタビューは、調査の必須事項であり、時間の経過により行う。
(2)インタビューは、要点をはずさないコミュニケーション(イエス・ノーでない)の重要な手続である。
(3)インタビューには、充分な事前準備と(打合せ)と綱羅性が必要である。

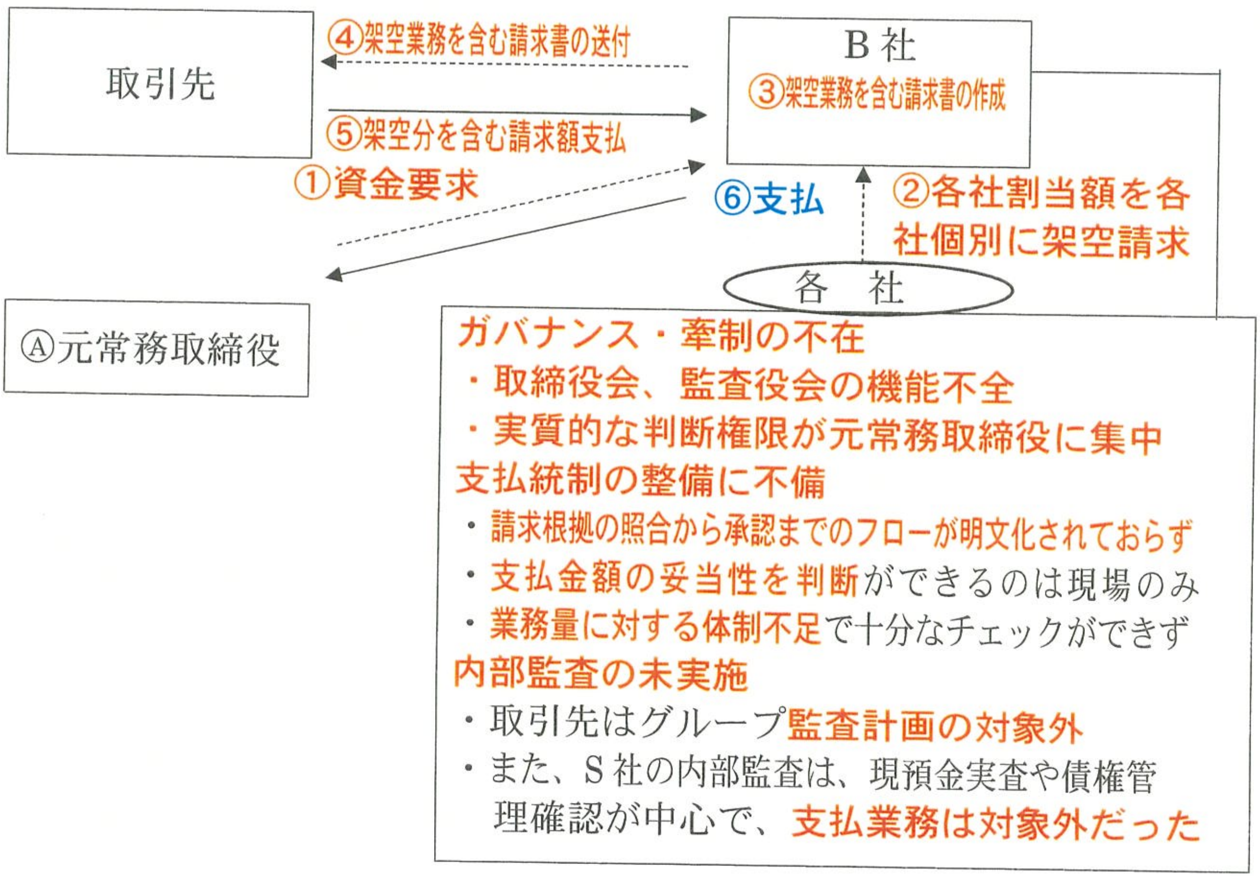
不正スキーム(二)



(3) 不正の発生要因

(業務への精通、顕著な成果)
㊙元常務取締役は、複雑で収益の確保が難しい当該業務で他の従業員の追随を許さないほど原価計算や外注先の手配や制御に精通し、顕著な実績を上げていた

(個人的事情)
接待飲食店への費消
高級なスーツの購入、接待飲食店主催のゴルフコンペへの出席、贈答品の購入車のリース代に使い、合計で月間 500 万円超を費消



(4) 再発防止策

1. 統制環境の改善

①ガバナンスの見直し、牽制効果を生じさせる

・グループ全体の**子会社の取締役会の実効性**を向上させ、複数の取締役が業務を監督し、相互牽制を行う。また、**子会社の人材ローテーション**を機能させるよう制度を改革する。

従　来	今　後
1人の取締役に**権限が集中**	複数の取締役による**相互牽制**

②職務権限/職務分掌の見直し

・取締役が、外注先との契約や発注量及び金額の**決定を1人で完結できない**よう、**職務権限/職務分掌を見直し**(決定者・起案者・報告先・協議先の整理・設定)。

従　来	今　後
1人で業務フローが完結	1人で完結しないよう職務分掌を見直し

2. 業務プロセス統制の改善

①支払に係る統制の改善

・グループの支払**業務プロセス(ルール)の見直し**を行う。

・内部監査で支払**業務プロセス(ルール)を監査**する。

従　来	今　後
支払業務プロセス(ルール)に不備	不備の改善+内部監査による検証

3. モニタリングプロセスの改善

①内部監査の強化

・リスク評価を行い、全社的な**監査計画の見直し**、支払業務を監査スコープに含める

従　来	今　後
支払業務が監査スコープ外	支払業務を監査スコープに含める リスク評価を行い全社監査計画の見直し

②内部通報制度の実効化

・コンプライアンス・**内部通報制度の研修を実施する**とともに、A社のマネジメントからのメッセージを発表し、内部通報制度の実効化を図る。

従　来	今　後
内部通報制度が形骸化	研修及びマネジメントからのメッセージにより 内部通報制度の実効性を向上

(5) 不正調査のポイント

1. 不正調査の計画

【事実認定と類似の不正行為の調査】

(1) 税務当局の調査を通じて、**外部業者とA元常務取締役の関与**が発覚している。この事実関係を反省するとともに、類似の不正行為の調査のアプローチを検討する。

【内部統制の未整備と無効化】

(1) 発覚した横領行為は経営者が関与しており、**内部統制が無効化**されていることが想定されるため、不正の範囲・影響額も多額となる可能性がある。

2. 情報の収集と分析

【不正の手口・スキームの解明】

(1) BとAが共謀することによって横領行為等が実施されているため、**関係者へのインタビューや電子メール等のレビュー**を通じて情報の収集と分析を行い、不正の手口・スキームを解明する。

3. 仮説の構築と検証

【会計帳簿と資金の分析】

(1) 不正スキームに基づいて、**会計帳簿と資金の分析**を行ない、不正な取引の全容を明らかにする。

(2) 経営者個人による横領金額を推定する。

【経営者個人による横領行為】

(1) 経営者個人から任意に**横領行為に関する入出金の記録**がわかるエビデンスの提供を求める(たとえば、関連する預金通帳等)。

(2) 横領行為をおこなった金額を確定する。

(6) 不正発見のポイント

① 本事案の不正行為は**連結子会社**で実行されている。**子会社の役員に権限が集中**し、親会社等からの**監視が十分でない**場合には、不正のリスクが高くなる。(5年間未発覚　**親会社から見えていない**)

② 親会社の経理部門や内部監査部門等による異常点のモニタリングや内部監査等が不正の発見に有効であったと思われる。具体的には、特定の取引先への**集中度合いの分析**、業務量と外部業者の**利用度合いの関連性の分析**などを通じて異常点を検知することが考えられる。

コラム	質問について
(1)開かれた質問(Open Questions)「はい」、「いいえ」ではない内容質問。 (2)閉ざされた質問(Closed Questions)「YES]、[NO]の簡単な質問。 (3)(1)が有効であるが、既知の情報を有効に活用する必要がある。	

IPOかわら版

「上場会社における不祥事予防のプリンシプル」の公表
上場会社に求められる不祥事発生の予防と対応

日本取引所自主規制法人は、平成30年3月30日に「上場会社における不祥事予防のプリンシプル」（以下、「予防プリンシプル」という。）を公表しました。

予防プリンシプルが公表された約2年前の平成28年2月24日に、日本取引所自主規制法人は、「上場会社における不祥事対応のプリンシプル」（以下、「対応プリンシプル」という。）を公表しています。対応プリンシプルでは、発生した不祥事の原因究明や再発防止策の構築を迅速かつ適切に行うことで、利害関係者からの信頼を回復するとともに、企業価値の再生に資することが期待されていました。

しかし、近年においては、上場会社によるデータの改竄や不適切会計といった不祥事が多発しており、不祥事の発生を予防しなければ、企業価値が毀損し、ひいては、資本市場全体の信頼性も損なうことになりかねません。

そこで、予防プリンシプルでは、不祥事の発生自体を予防するために、次の6原則を指針として掲げています。

①実を伴った実態把握
②使命感に裏付けられた職責の全う
③双方向のコミュニケーション
④不正の芽の察知と機敏な対処
⑤グループ全体を貫く経営管理
⑥サプライチェーンを展望した責任感

①では、コンプライアンスの実態を多面的かつ正確に把握し、持続的かつ自律的な仕組みとして機能させることが求められています。

②では、コンプライアンスに対するコミットメントを明確化し、コンプライアンス違反を誘発させせない組織体制や経営目標を構築することが求められています。

③では、現場と経営陣のコミュニケーションを充実させ、コンプライアンス意識を双方で共有することが求められています。

④では、コンプライアンス違反の発見と対処を迅速化し、重大な不祥事に発展することを事前に防止するための企業文化の定着が求められています。

⑤では、グループ構造や特性に即したリスク管理により、グループ全体に浸透する実効的な経営管理を行うことが求められています。

⑥では、委託先や仕入・販売先などで問題が発生した場合であっても、サプライチェーンにおける当事者としての責務を果たすことが求められています。

また、予防プリンシプルでは、指針だけでなく、不祥事の発生がより身近な問題として認識されるよう、各原則に関連する不祥事の事例も記載されています。

不祥事発生の予防と対応の2つの取り組みが、投資家による新たな企業価値の測定基準となりそうです。

上場が　経済活性の　起爆剤

偉人の名言から学ぶ IPO！

【第18回】
為せば成る　為さねば成らぬ何事も　成らぬは人の　為さぬなりけり
上杉鷹山

今回の名言は、領地返上寸前の米沢藩再生のきっかけを作り、江戸時代屈指の名君として知られている上杉鷹山によるものです。彼は、もともと米沢藩上杉家の出身ではなく、10歳で米沢藩の婿養子となり、その後、17歳の時に藩主の座につきました。藩主となり、藩に莫大な借金があることを知ると、借金返済のため、自ら率先して節約に努め、財政再建、産業育成、精神復興を同時に達成していきました。

この名言は、単に「やればできる」ということを唱えているだけではありません。人は、「自分にはこれはできない」とか、やったこともないのに「これは自分には向いていない」といった考えに陥りがちです。しかし、これは、先入観によって自分の限界を自分で決めていることになります。「自分はここまでしかできない」と考えた時、それ以上を目指すことを止め、自分自身の成長を止めることになってしまいます。自分の限界を設けずにあらゆる可能性を模索すると、今以上の結果を出すためにはどうすればよいのかと常に考えることで多くのチャンスに恵まれることでしょう。上場を目指す過程においても、自社の限界を自ら設定したりせず、あらゆる選択肢を模索していっていただきたいと思います。

IPOニュースダイジェスト

◆日本取引所、売買審査業務にAI導入

日本取引所自主規制法人と㈱東京証券取引所は、相場操縦行為等の不公正取引の調査を行う売買審査業務に人工知能（AI）を導入し、3月19日から審査業務において利用を開始したと発表しました。

日本取引所が導入したAIは、売買審査の初期段階の調査における売買執行形態の不自然さの評価について、これまでの審査担当者の知見をAIに学習させ、それを審査業務に活用するものです。

審査上の最終判断は審査担当者が行いますが、審査担当者はより判断の作業に注力することができるようになったと言えます。（3月19日）

デジタル・フォレンジックの手続

①初動対応
⇒依頼者からのヒアリング等

②媒体の収集
⇒媒体の物理的な押収・回収作業

③証拠保全
⇒媒体のデジタルデータを一切書き換えることなく、
かつ可能な限り全領域の完全な複製を作成すること

④データの解析
⇒削除済みデータの復元やレジストリ、アクセス履歴の
調査等

⑤報告
⇒解析で得られた結果を依頼者に報告すること

デジタル・フォレンジックの調査媒体

PC・サーバ（HDD・SSD等）
- ・PC
- ・外部記憶媒体（外付けHDD、USBメモリ、SDカード等）
- ・サーバ（ファイルサーバ、メールサーバ等）

モバイル機器（携帯電話・スマホ等）
- ・携帯電話（ガラケー）
- ・スマートフォン（LINE等無料通話アプリの解析含む）
- ・タブレット
- ・ICレコーダー、カーナビ等その他のデジタル機器

～LINEのデータ復元～

LINE（Message）

Status	Category	Sender	Recipient	Date Time	Contents	Attach Files
削除	受信	○○君		2015/01/27 09:27:55	はいよー！	
削除	送信		○○君	2015/01/27 09:19:46	違う方かららいんします	
削除	受信	○○君		2015/01/27 09:03:12	良いね！	
削除	送信		○○君	2015/01/27 09:00:56	いや、遠征です	
削除	受信	×××		2015/01/27 07:31:50	ねてましたあ	
削除	受信	○○君		2015/01/27 02:30:22	寝てた！遊びに？	
削除	送信		×××	2015/01/27 00:50:43	なにしてんの？	
削除	送信		○○君	2015/01/27 00:50:28	水曜日大阪いってきます	
削除	送信		○○君	2015/01/27 00:50:18	お疲れさまでーす	

Q. どのくらい昔のメッセージまで復元できるか？

- 数年前のメッセージでもメモリ上に残っていれば復元できる。LINE社のサーバには２か月前までのデータが保存されているが、端末に残るデータの期限は特にない。

Q. 復元できるメッセージの量は？

- 数千メッセージが復元されたこともあるが、数件の場合もあり。機種、使用状況により異なる。

Q. アプリが削除されても復元できるか？

- 物理イメージが取得できれば復元できる可能性あり。

野球賭博とデジタル・フォレンジック

賭博調査委 削除メール、LINEデータ復元で「動かぬ証拠」

巨人の内部調査では当初発覚しなかった税理士法人勤務を自称する大学院生Ａ氏、飲食店経営者のＢ氏と笠原の関係、福田、松本竜の新たな事実も調査委の中間報告で明らかになった。熊崎コミッショナーが「徹底究明を」とし、調査委へ委嘱したのは今月５日。１７日間の調査方法について、大鶴基成委員長によると、３選手から提出された携帯電話は、いずれもメールが削除されていた。削除された**メール**や無料通信アプリ「**LINE**」のやりとりを**「デジタルフォレンジック（電子鑑識）」**を駆使して復元。「メールは極めて膨大な量ですが、分析し、何月何日の何時何分にどういうやりとりを誰としているのかを踏まえヒアリングをした」と同委員長。膨大な量のメールを分析するために調査委の３人だけでなく、新たに弁護士７人が参加。NPBの職員の補助も受け、動かぬ証拠をつかんだ。

（Sponichi Annex 平成27年10月22日より）

序章　デジタルフォレンジックは万能ではない

1．デジタルフォレンジックとは？

・電子的記録は、必ず消えるとは限らない
・消えるときもある
・生のデータでは使えない
・調査対象者に知識がある場合は要注意

2．有効に使うために

・早期（即時）保存
・専門家への依頼
・期待しすぎない
・デジタルフォレンジックが可能な社内体制
機器利用ルール、データ保管・廃棄ルール等

段階の説明へ

三　デジタルフォレンジックの失敗例

1．保管に着手することが遅すぎた
→データが上書きされた
2．被調査者が同意を撤回した　パソコンの引揚げ
→機器の調査ができない
3．データが多すぎて処理できない
→木の葉を森に隠された
4．専門性の低い業者に依頼した
→データが消えた、復元できない等々

会計士協会

第1章　不正調査の全体像

- 一.　不正調査は何をするか
- 二.　事実の調査
- 三.　社内における情報統制
- 四.　公表の要否の検討
- 五.　被害拡大防止措置
- 六.　第三者委員会の窓口
- 七.　事件から距離のある者の必要

一.　不正調査は何をするか

1. 証拠の保全

証拠に基づいて

- 文書保管（会社からの持出禁止）
- データ・・・デジタル・フォレンジックの活用
  経理データ、取引データ、メール等
- 人証・・・ヒアリング＆記録化

2. 事実を調査する

抜けているものの明確化

- 書類の確認
- ヒアリング
  → 証拠に基づく事実認定
- デジタル証拠の重要性

一. 不正調査は何をするか

3. 報告書を書く

- 調査結果
- 調査手続の概要
  （関与者、調査方法等）
  ⇒デジタル証拠への言及

4. その他

- 証券取引所との面談
- その他当局との面談
- 監査法人との意見交換
- 会社関係者（当事者を除く）との意見交換

二. 事実の調査

1. トラブルの類型確認

- 単独型
- 共犯型
- 巻き込まれ型

2. 第三者や顧客等の人的・財産的被害の確認

- 現在の人的被害
- 将来の人的被害の可能性
- 違反状態の継続等
  → これらがあった場合、対応は緊急

巨額債務　$\boxed{\text{経済}}$　2020.2.10

1、日本の政府債務は 1200兆円 GDPに対して 240%

2、国の借金は返さなくてよいか

(1) 返済必要、財政に魔法の杖はない

(2) フリーランチは存在しない

(3)

3、返済できるのか

(1) 政府の税収は 58.4兆円、支出は 72.8兆円 (2015)
返済できる筈はない

(2) 物価が2%上昇すると日銀の含み損は46兆円となり
日銀の自己資本を超える

(3) 国債の利払は 10兆円を超えている

8. 日本の債務は問題なしとする意見

(1) 日本の純債務はそれほどでもない

(2) 日本の債務は国内債務であり問題ない

(3) 日銀は政府の子会社だから問題ない

インフレ、デフレは、物を中心に、主に
見るべきではないか、

戦後の日本やドイツのインフレは、
物不足を中心に生じたのではないか

日本の巨額債務の問題は、インフレ以外の
問題にも視点をもつべきではないか

財政が社会保障へつぎ込まれたとき、
〃　投資（効果のない）へつぎ込まれすぎたとき、

5. 1800兆円を超える国民の金融資産
―― それが政府の負債分があれば、
支払えるし、支払った部分は国民に戻ってくる

6. ギリシャの場合（2009ギリシア危機）は、
対外債務比率は80%であった。
― 即ち、借金が返済できないという問題、
その結果、物不足も起きている。
この件も、物不足が問題ではないか？

7. 日銀は政府の子会社だから問題ない
日銀当座預金に債務性はない

4

④天下に先だちて憂う

2020.01.16

全国法人会と沖縄法人会の税制委員を30年余り務めさせていただいた。政府債務がGDPを超え始めた20年前頃から、年2〜3回の税制委員会で、税収と歳出のアンバランスについて全国の委員と意見を交換することが多かった。

現在、政府債務はGDP比で250％にも達するなか、社会保障費は増え続けている。財政再建を急ぐべきであるのに、安易とも言える議論が語られている現状に不安を覚える。

その一つは、FTPL（物価水準の財政理論）である。もし、その国の国債の債権者のほとんどが、その国の国民である場合、財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、物価は緩やかに上昇し、それが常態化することで財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的であるとする。（プリンストン大学 シムズ教授）これでは財政再建の放棄であるが、我が意を得たりと賛意を表す日本の学者もおり、国を憂えないのかと心配である。

他の一つは、MMT理論（現代貨幣理論）である。自国通貨を持つ政府は、財政的な予算制約に直面することはないという考えである。国債をいくらでも発行できるし、それによって破綻することはない。巨額の財政赤字があっても、インフレも金利上昇も起こっていない日本はMMTの成功例であるとする意見さえもある。（MMTの主唱者 ステファニー・ケルトン教授）

世界の景気は10年振りに下降するといわれている中、財政再建の失敗は、知らないうちに断崖絶壁を背にして座っているようなものであり、亡国への道である。広い視野と勇気を持って、「天下に先だちて憂う、先憂後楽」は、治者の要諦であり責任である。狼少年と言われるのを恐れてか、この国難とも言うべき状況を座視している識者も認識を改めるべきである。

(714文字)

日銀が大量に保有する国債について、

インフレが発生した場合、

日銀はインフレ抑制手段として、金利を上げるしか方法はないが、

大量に保有する国債の金利がゼロであるから、

支払利息が増加し、巨額赤字の累積となる。

そのため インフレは進行する。

市場に供給されたマネタリーベースは そのままであることで、

インフレ加速などの副作用の懸念がある。

現状の経済情勢で続けば、ぬるま湯につかっているようで ほぼ何も起こらず、日の債務が膨らむだけである。

しかし世界で何か起きたときは、・・・

リーマンショック以後、世界では大量のマネーが市場に供給され、金利も低く抑えられている。

その結果、グローバル債務残高は、

1京9000億円とも 2京7000億円とも言われている

これは巨額損失発生リスクである。

最悪のケースは、政府の財政が悪化し、デフォルトすること

である。

国家の債務を解消する歴史上の8方法

(1) 増税

(2) 歳出削減

(3) 低金利

(4) インフレ ⟶ これしかないのではないか？

(5) 戦争

(6) 国外からの援助

(7) 経済成長

(8) デフォルト

終戦直前 1944年の

政府債務残高は、 1,520億円

GDPは、 697 〃

対GDP比率は 220%

ハイパーインフレ

1952年の消費者物価上昇は 45〜100倍

対GDP比率は 13%

健全財政に成功

戦時補償特別税

1946年からの5年間に 487億円を徴収

当時の国富は 約4000億円であったから

日本中の資産の1割にこれになる.

特別税の徴収は、

1

合成関数

2020. 2. 10

たとえば　$(x^2-3x+1)^8$　のような関数

つまり、2つの基本的な関数

$f(x)=x^2-3x+1$，　$g(X)=X^8$ のような関数

が合成されてつくられた関数

$\boxed{g(f(x))=(x^2-3x+1)^8}$ となっている

$g(X)^8$ が、$f(x)=x^2-3x+1$

$g(f(x))$ は、次の構成からなっている　$f(x)$ は $g(f(x))$ にかこまれている

包んでいる

$$x \xrightarrow{f(x)} x^2-3x+1$$

$$\| $$

$$X \xrightarrow{g(X)} X^8$$

$$\downarrow$$

$$(x^2-3x+1)^8$$

$f(x)$ のあとで
$g(x)$ が包んでいる。

とは違う

$$x \xrightarrow{g(x)} x^8$$

$$\|$$

$$X \xrightarrow{f(x)} X^2-3X+1$$

$$\Downarrow$$

$$(x^8)^2-3x^8+1$$

$(x^2+5)^3$ を微分する

これは2つの関数、$g(X)$が $f(x)$がなって $g(X)$が含んでいる

$f(x)=x^2+5$ と $g(X)=X^3$ の合成関数

$\boxed{g(f(x)) = (x^2+5)^3}$ である。

それぞれの関数 $f(x)$, $g(X)$ の微分

$$f'(x) = (x^2+5)' = 2x$$

$$g'(X) = (X^3)' = 3X^2$$

因果応報のカラクリ

世の中は何段階かのステップを経て結びついている

風が吹けば

桶屋が儲かる

微小な動き Δx

Δxを少し変えたら 変化したら

微分方程式

差 小さな動き y

yはどう変わる

これがポイント

xは、tという仲介者を経て 間接的にyを決めている。このようなとき
yは tの合成関数であるという

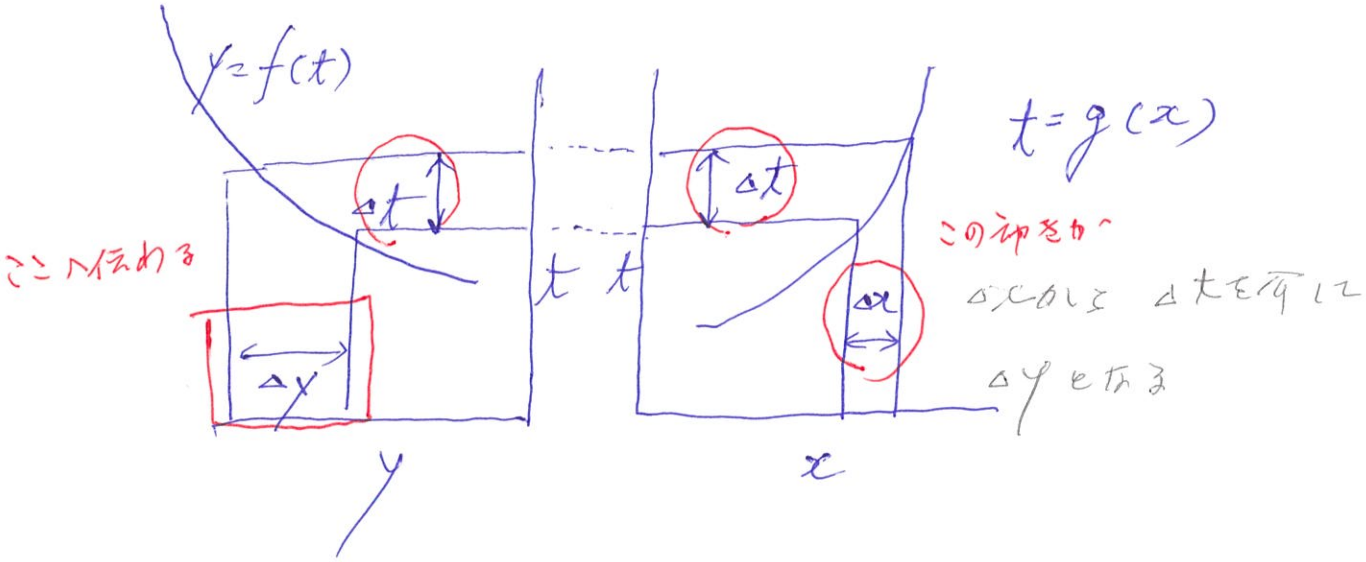
xを Δx だけ増やして考えると、 tは Δt だけ増加し、

tが Δt だけ増えると、 yは Δy だけ増えると考えると

Δx と Δy の比は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$ となる。

Δtが Δyだけ増加
その理由は
Δxが Δtだけ



この式で Δx→0 を考えると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)$$ となり

積の極限は、極限の積であるから

$$\lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Δx→0 と Δt→0 は同じことなので

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

合成関数の微分法は.

(1) $y=(x^2+2x+3)^{100}$

というような関数を微分するときに

① $x^2+2x+3=t$ とおいて

② $y=t^{100}$ となり

②' $\dfrac{dy}{dt}=100t^{99}$ となる

他方 x^2+2x+3 は

①' $\dfrac{dt}{dx}=2x+2$ となるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=100t^{99}(2x+2)$$
$$=100t^{99}\times 2(x+1)$$
$$=200(x^2+2x+3)^{99}(x+1)$$

となる.

(2) また $y=\sqrt{ax^2+bx}$ を微分すると

$ax^2+bx=t$ とおき

$y\sqrt{t} \rightarrow y=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$..

$t=ax^2+bx$ $\dfrac{dt}{dx}=2ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (2ax+b)$$

$$= \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{——} (5\text{-}11)$$

$$\frac{dk^x}{dx} = \frac{d}{dx} k^x = k^x \log k \quad \text{——} (5.12) \text{ —?}$$

k^xをxで微分するために

$y = k^x$ —(5-13) と置き、—(5-13)

両辺の対数をとると

$$\log y = x \log k \quad \text{——} (5\text{-}14)$$

この両辺をxで微分すると

(5-11)より、 $z = \log y$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

すなわち、(5-14)の両辺をxで微分すると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log k$$

See 5-2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{—(5.11)}$$

$$y = k^{x} \quad \text{—(5.12)}$$

↓ 両辺を対数化

$$\underline{\log y} = \underline{x \log k} \quad \text{—(5.14)}$$

$$(x \log k)' = \log k$$

$$z = \log y$$

↓

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$(\log y)'$ のことか ?

↓

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log k$$

? $\log y$ を微分すれば $\frac{1}{y}$ になるのは解るが

何故 $\frac{dy}{dx}$ が付いてくるの？

$(\log y)' = \frac{1}{y}$ だけでいいのでは？

$$y = k^x \quad —(5.13)$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log k$$

従って

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y\log k} \rightarrow \frac{d}{dx}y = y\log k$$

故(5.13)によってyはk^xであり　$(y=k^x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}k^x = k^x\log k}$$

---

yがxの関数であるとき、$\log y$をxで微分すると

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$ となる。

---

yはxの関数 $\rightarrow y = f(x)$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}} \quad (5.15)$$

$y = \log(x^2+4)$ の場合には

$f(x) = x^2+4 \quad f'(x) = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+4}$$

合成関数

国民所得 y は、

投資 i の関数であり

投資 i が時間 t の関数であるとするならば、

- y は i の関数
- i は t の関数
- t の変化は y に影響する

$$y = f(i)$$

$$i = g(t)$$

結局 y は t の関数となって

$$y = f(g(t))$$ と表わされる

ここで $u = g(x+h) - g(x)$ とおくと

$$y = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+u) - f(u)}{u} \cdot \frac{u}{h}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{f(u+u) - f(u)}{u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \left(= f'(u) \cdot g'(x) \right)$$

国民所得 y は、

労働雇用量 x の関数である。

$$y = f(x) \quad ①$$

y は x の関数

x は y を動かす

x の変化は y に影響を及ぼす

（逆関数）

しかし、x が y を決めるというよりも、

y が x を決めるという方が、より論理的な場合が生じる

つまりある状態では、

$$x = \phi(y) \text{ である } \quad ②$$

(対数微分法)

対数をつけて微分する方法を 対数微分法 という

pを実数として　$y = x^p$

両辺を絶対値にする　$|y| = |x^p|$

両辺に対数をとる　$\log|y| = \log|x^p|$

対数の性質より　$\log|y| = p\log|x|$

両辺を微分する　$\dfrac{y'}{y} = p\dfrac{1}{x}$

両辺にyをかける　$y' = p\dfrac{1}{x}y$

$y=x^p$を代入する　$y' = p\dfrac{1}{x}x^p$

指数法則より　$y' = px^{p-1}$

上記 $y=x^p$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ だから　$(x^p)' = px^{p-1}$

微分の意味

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log_k x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_k(x+\Delta x) - \log_k x}{\Delta x}$$

$$\left(\log A - \log B = \log\frac{A}{B}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_k \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \quad \text{—} (4.32)$$

$$\frac{\Delta x}{x} = h \rightarrow \Delta x = hx \qquad \Delta x \to 0 \text{ なら } h \to 0$$

(4.32) を書き直すと

$$\frac{d}{dx}\log_k = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_k(1+h)}{hx} \leftarrow \Delta x$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{h}\log_k(1+h)\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h \to 0} \log_k (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_k e$$

k のかわりに e を使うと

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

y が u の関数で、 $y=f(u)$

u が x の関数で、 $u=g(x)$

と表わされるとき、 y は x の関数であり

$$y=f(u)=f\{g(x)\}$$

この関数関係を、 $y=f(u)$ と $u=g(x)$ の合成関数という

合成関数 $y=f\{g(x)\}$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

この場合 $u=\log_e y$ とおくと

$u=f(y)$, $y=g(x)=a^x$ から

{ 両辺の対数をとって、 $\log_e y=x\log_e x$ として.)

$u=f\{g(x)\}$ となり $\cancel{\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$

(両辺同じ変数 x について微分すると)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{y'}{y}$$ となる。

近次(式)

2020.2.10

気象庁のスーパーコンピューター

微分とは1次式で近似すること

ある国では、所得 x に対する所得税 y が次の式で与えられていた

$$y = f(x) = 0.2x^2$$

工夫 ①

その導関数は

$$y' = f'(x) = 0.4x$$

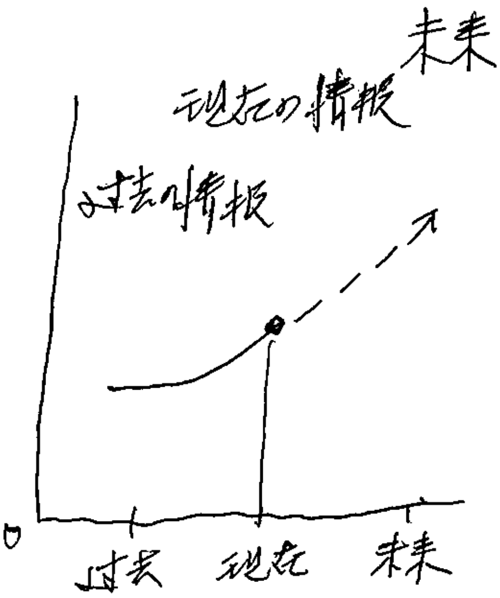
$x = 2$ から $x = (2+h)$ までの h の間に増加した所得税は

$$f(2+h) - f(2) = 0.2(2+h)^2 - 0.2 \times 2^2 = \underline{0.8h + 0.2h^2}$$

この直線は点Aで放物線 $y = 0.2x^2$ と接しているので、放物線 接線という

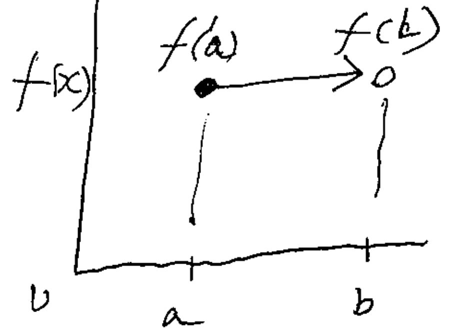
$$\underline{y = 0.8x - 0.8}$$

未来に光明あり



第0次近似

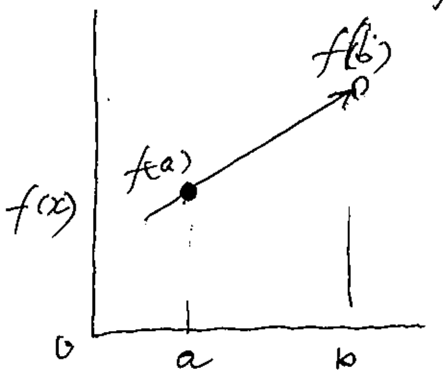
$f(b)=f(a)$



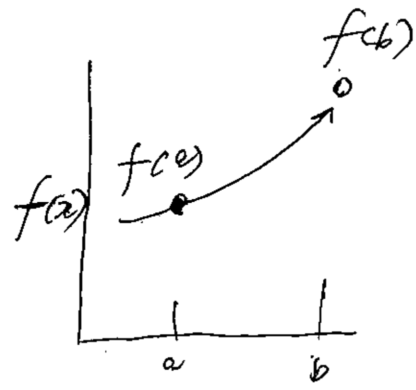
Let us eat and drink,
for tomorrow we die.

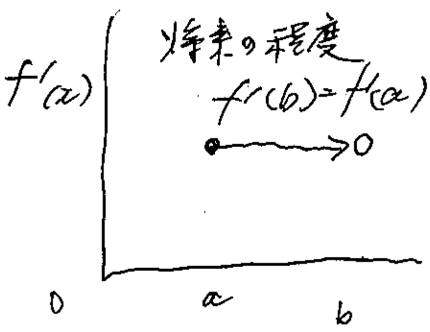
第1次近似

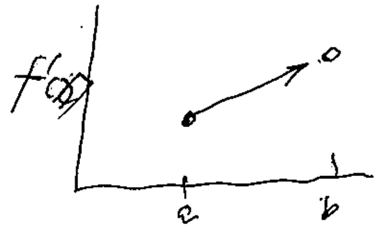
$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)$

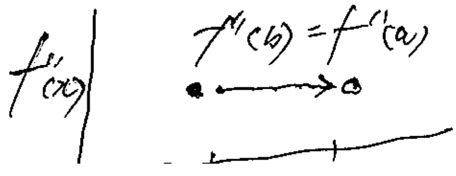


第2次近似式









微分の応用　第1次近似式

① 曲線や点の運動

② 近似式（接線で近似）

関数 $f(x)$ が $x=a$ の付近で微分可能であるとき、

微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

$|h|$が十分に小さいならば、

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \fallingdotseq f'(a)$$ と考えることができる

近似

この式より、

$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$ が成り立つ ①

これを第一次近似式という

①で $a+h=x$ とおくと $|x-a|$が十分に小さいとき、

$(h=x-a)$

$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$ —② が成り立つ

②の右辺は、接線の式 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ に等しい ③

従って、関数 $f(x)$ の値を 接線 ③ の値で 近似したことになる

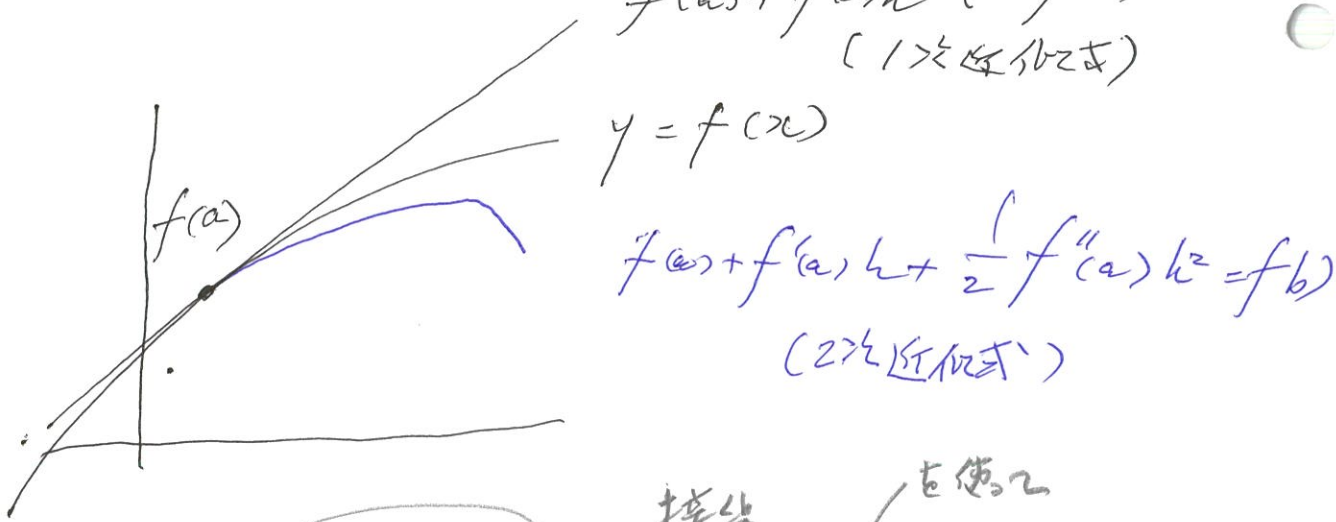
第一次近似式

$$f(a+h) \doteqdot f(a) + f'(a)h$$

$h = b - a$ が充分小さいとき、$b = a + h$

$$f(b) \doteqdot f(a) + f'(a)h$$

一次近似は直線で近似



一次近似　接線（直線）を使って近似

二次近似　放物線で近似

第二次近似式

$h = b - a$ とおくと

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$$ となり、

h が十分小さいときは、2次近似式が成り立つ

$$f(a+h) \doteqdot f(a) + f'(a+h) + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

n次近似式

第1次近似式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$

第2次近似式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$$

テーラの定理, n次近似式

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

nを大きくすれば、いくらでも $f(a+h)$ の値に近い近似値を求めることができる

テーラの定理で $a=0$, $h=x$ とすると、マクローリン定理となる

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}x^n$$

テーラ級数

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots\cdots$$

を、aを中心とする$f(x)$のテーラ(Taylor)級数という

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

aの位置の情報だけで、他の位置の値が

いくらでも正確に計算できる

テイラー級数

1. aを中心とする $f(x)$のテイラー(Taylor)級数

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a)$$

工夫 9

$$\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a)}$$

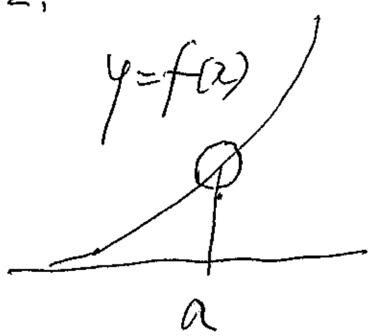
aの位置での情報だけで、他の位置の値が
いくらでも正確に計算できる。

コンクリートの壁の向こう側がいくらでも詳しく観察できる魔法のような式だ。

テイラー展開

1、テイラー展開とは、与えられた関数を、ある点の近くで多項式に近似するために用いられるもの。

2、



$f(x)$ について $x=a$ の周りで多項式に近似！

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

ある関数 $f(x)$ について テイラー展開を用いて x の多項式で近似することを考える。

"x がある値 a をとるとき、$f(x)$ が a の近くで、このような多項式で近似できるよ！" ということ

3 テイラー近似を使う理由は、

計算がラクになる

例えば $(1.005)^{15}$ を計算せよというとき、

$$\left.\begin{aligned} &(1.005)^{15} \text{ を } \underline{1} + \underline{15 \times 0.005} \text{ として } = 1.075 \\ &(1.005)^{15} = 1.07768\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \text{近似}$$

3. テイラー級数は、

aのところの情報を根拠に

$f(x)$の値を推算しようというもの

aに位置における種々の情報 $f(a), f'(a), f''(a)$

---を利用して、任意の$f(x)$の値を、

望みに応じて、いくらでも正確に計算する

ための魔術!!

aの位置は、$f(a), f'(a), f''(a)$, ---などを

求めやすいところに選ぶ必要があり、

$\sin\frac{\pi}{5}$の値を求めるために

$f(a)$として、$\frac{\pi}{4}$のところをaの位置に選定した

何かいい方法はないかなぁと考えた時にテイラー展開が使えるんです！

10

$(1.005)^{10}$を計算したい！

手計算で求めるのはたいへん、、、

テイラー展開で簡単に計算！！

ここではテイラー展開の一次近似のみを使って計算してみましょう！

一次近似とは多項式のxの一次の項までを使って近似をすることです。

それではやってみましょう。

15×0.005

まずは1.005を１と0.005に分けます。

https://syarunikki.com/taylor-expansion/

$(1.005)^{15}$ を $(1+x)^{15}$ と考える

↓

$$(1+x)^{15} = (1+a)^{15} + \underline{15(1+a)^{14} \times (x-a)}$$

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$ を利用

↓

簡単のために $a=0$ として計算してみる

10-2

そしてa=0としてみると、、

$(1+x)^{15} = 1 + 15x$という簡単な形になった！
今求めたいのは$(1.005)^{15}$の値なので
$x = 0.005$を代入して計算すると

$$(1.005)^{15} \cong 1 + 15 \times 0.005$$
$$= 1.075$$

手計算でも簡単に求められた！！

いかがでしょうか？

すごくめんどくさそうな計算もこのように近似を使うことで簡単に求めることができました！

ただ最後に＝を使わずにニアリーイコールを使っているのはあくまで近似なので完全に正しい値ではないということなんですね。

しかしおおよその値はテイラー展開を使って求めることができるんです！

実際に電卓で(1.005)の15乗を計算してみると1.07768…という値になります。

テイラー展開でかなり近い値を得ることができるのがわかりますね！