5 グループ法人税制のポイント

2020.02.03

1. 譲渡損益調整資産の繰延制度の趣旨

(1) グループ内での資産の譲渡で含み損を実現させる節税の防止を図る税制

(2) グループ内の個人にも適用される
自分が支配する会社の土地を本人が支配する会社へ売った場合の繰延対象（6親等の個人）

(3) しかし、グループ以外で転売されると(1)の趣旨ははずれる

(4) 譲渡損益は、法人税法上の資産又は負債（譲渡損益調整a/c）に振替えられ留保される

(5) しかし、買主にとっては、組織再編のように簿価承継ではない。あくまで時価承継である。

2. 仕訳例
時価5000万円、簿価2000万円の土地をグループ内で譲渡した

（売主法人）

現金	5000	土地	2000	
		繰延a/c	3000	（譲渡益は計上しない）

（買主法人）

土地	5000	現金	5000

3. 組織再編税制と異なる制度を採用した理由

(1) 組織再編税制においては、
含み損の利用を規制する制度をセットした

(2) グループ法人税制では、グループ内での売買について
譲渡損益（含み損を含む）を実現させないことにした

(3) 理由？

4. グループ法人税制で譲渡損益調整勘定の実現する時期

(1) 売主と買主の完全支配関係が失われた時
完全支配関係にある会社をグループ外に売却した場合
や解散した場合

(2) 資産が消滅した場合
グループ会社の株式の譲渡による調整勘定の設定
その株式が発行会社に自己株式として買取られた場合
法人税法上の資産でなくなってしまう

(3) 買主側の取得資産の償却、除却、第三者への譲渡など
買主が時価を実現したとき。

5. しかし、譲渡損益調整資産が、組織再編によって
グループ内で再移転した場合は、調整勘定は実現せず
グループ外に処分されるまで継続繰延されることに
なっている

6、グループ内の寄附金

(1) グループ内での資産の移動

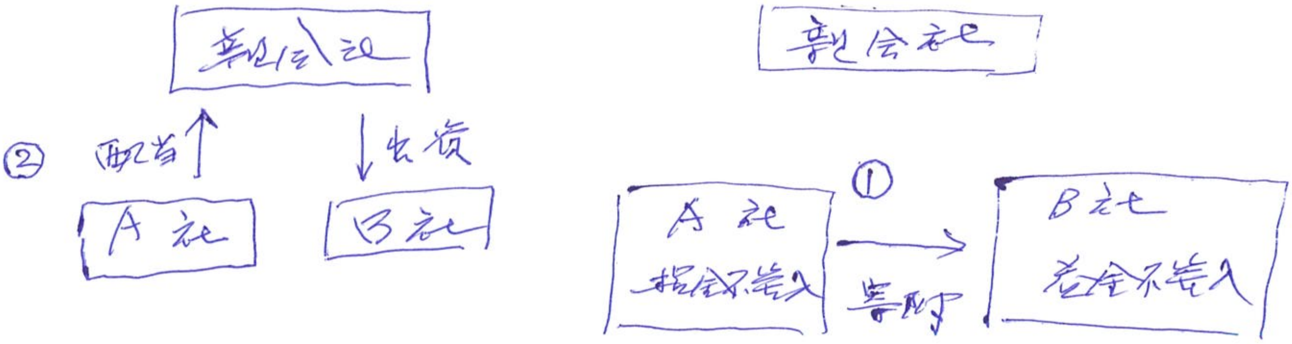
① 寄附の場合、C親会社の下になるA社からB社へ10億円の寄付をする

② A社が親会社へ10億円の利益配当をする

その後C親会社は、B社へ10億円の出資をする

①と②の結果は、同様だ

グループ法人税制は、寄附金の損金を資本取引と位置づけているようだ。



(2) 寄附金税制の立法趣旨としては、

資産をグループ内で移動することは自由でよいが、

損益は別法人に付け替えることは禁止するということだ

(3) ~~(1)~~①のとき 親会社は、寄附修正を行う

子会社株式 1,000 / 利益積立金 1,000 寄附修正

このため、グループ全体では親会社の利益積立金が増加するという矛盾が生じる

7、不振子会社救済のために貸付金を放棄する場合、

①貸倒損失（子会社の受贈益課税）になるのか

②寄附金の損金不算入（子会社の受贈益の非課税）になるのか、

この点については、立法技術上①にせざるを得ない。

（法基通4-2-5）

なぜならば、個人株主が混ざる場合には、寄附金税制は

適用されないからだ。

（益金不算入とされない受贈益の額）

四－二－五　内国法人が当該内国法人との間に完全支配関係がある他の内国法人から受けた受贈益の額が、当該他の内国法人が当該内国法人に対して行った損失負担又は債権放棄等により供与する経済的利益の額に相当するものである場合において、その経済的利益の額が九－四－一又は九－四－二により当該他の内国法人において法第三七条第七項《寄附金の損金不算入》に規定する寄附金の額に該当しないときには、当該受贈益の額は当該内国法人において法第二五条の二第一項《完全支配関係のある法人間の受贈益の益金不算入》の規定の適用がないことに留意する。

（平二二課法二－一追加）

（受贈益の額に該当する経済的利益の供与）

四－二－六　内国法人が、当該内国法人との間に完全支配関係がある他の内国法人から、例えば、金銭の無利息貸付け又は役務の無償提供などの経済的利益の供与を受けた場合には、支払利息又は役務提供の対価の額を損金の額に算入するとともに同額を受贈益の額として益金の額に算入することとなるのであるが、当該経済的利益の額が当該他の内国法人において法第三七条第七項《寄附金の損金不算入》に規定する寄附金の額に該当するときには、当該受贈益の額は当該内国法人において法第二五条の二第一項《完全支配関係のある法人間の受贈益の益金不算入》の規定の適用があることに留意する。

（平二二課法二－一追加）

つまり、「経営成績が不良な子会社へ債権を免除した」場合に、寄附金税制が適用されて、受贈益は非課税と思っていたら、法9-4-1が適用されて受贈益に課税になってしまうのだ。

第四節　寄附金

第一款　寄附金の範囲等

（子会社等を整理する場合の損失負担等）

九—四—一　法人がその子会社等の解散、経営権の譲渡等に伴い当該子会社等のために債務の引受けその他の損失負担又は債権放棄等（以下九—四—一において「損失負担等」という。）をした場合において、その損失負担等をしなければ今後より大きな損失を蒙ることになることが社会通念上明らかであると認められるためやむを得ずその損失負担等をするに至った等そのことについて相当な理由があると認められるときは、その損失負担等により供与する経済的利益の額は、寄附金の額に該当しないものとする。

（昭五五直法二—八追加、平一〇課法二—六改正）

（注）　子会社等には、当該法人と資本関係を有する者のほか、取引関係、人的関係、資金関係等において事業関連性を有する者が含まれる（以下九—四—二において同じ。）。

（子会社等を再建する場合の無利息貸付け等）

九—四—二　法人がその子会社等に対して金銭の無償若しくは通常の利率よりも低い利率での貸付け又は債権放棄等（以下九—四—二において「無利息貸付け等」という。）をした場合において、その無利息貸付け等が例えば業績不振の子会社等の倒産を防止するためにやむを得ず行われるもので合理的な再建計画に基づくものである等その無利息貸付け等をしたことについて相当な理由があると認められるときは、その無利息貸付け等により供与する経済的利益の額は、寄附金の額に該当しないものとする。

（昭五五直法二—八追加、平一〇課法二—六改正）

（注）　合理的な再建計画かどうかについては、支援額の合理性、支援者による再建管理の有無、支援者の範囲の相当性及び支援割合の合理性等について、個々の事例に応じ、総合的に判断するのであるが、例えば、利害の対立する複数の支援者の合意により策定されたものと認められる再建計画は、原則として、合理的なものと取り扱う。

（完全支配関係がある他の内国法人に対する寄附金）

九—四—二の五　内国法人が他の内国法人に対して寄附金を支出した場合において、当該内国法人と当該他の内国法人との間に一の者（法人に限る。）による完全支配関係がある場合には、当該内国法人及び当該他の内国法人の発行済株式等の全部を当該一の者を通じて個人が間接に保有することに[illegible]当該寄附金の額には法第三七条第二項（完全支配関係がある法人間の寄附金の損金不算入）の規定の適用があることに留意する。

8、無償の役務の提供

9、寄附金税制と債務超過会社の組織再編

完全債務超過会社を吸収合併することは、
親会社が子会社の債務引受を行ったことと同様の経済的効果がある

(1) グループ法人税制では、子会社に寄附を実行し、評価損を計上することなく、債務超過を解消してから合併することは可能である。

(2) 役務の無償提供による損失を防止するのが、立法趣旨であって、元本の債権放棄的な寄附は想定していないのではないか。

整理損の場合は整理損を評価後、
親から整理へ寄附(又は免除)を行う。
そうすれば、整理は問題ない。
親会社の損失(免除損)になるか、寄附になるか
が問題である。

免除損(損金)を行ない整理の免除益を計上
できなくても、整理の寄附(非課税免除益)、
親会社の寄附(損金不算入)であるべきか。

それでは、増資して、債権を回収し、株式を他へ譲渡(株式譲渡損を計上)すれば、それが認められないということになるのか。
もし、整理を親会社の部門が行っていればどうなるのか。
その都度の損失でOKなのか
それから、子会社の損失(評価損など)を表に出すことが問題なのか

② 部分内（100%グループ内）の損益は実現しない
③ 寄付金と受贈益は生じない（存在しない）
① 固定資産の譲渡損益 部内移転時（外部移転時）
② 配当は益金不算入
譲渡損益は発生しない（存在しない）

グループ法人税制（受取配当）

部内内部処理

H26.01.01
H25.07.26
H25.06.29
H24.07.27
H22.08.06
H22.03.18

仕訳

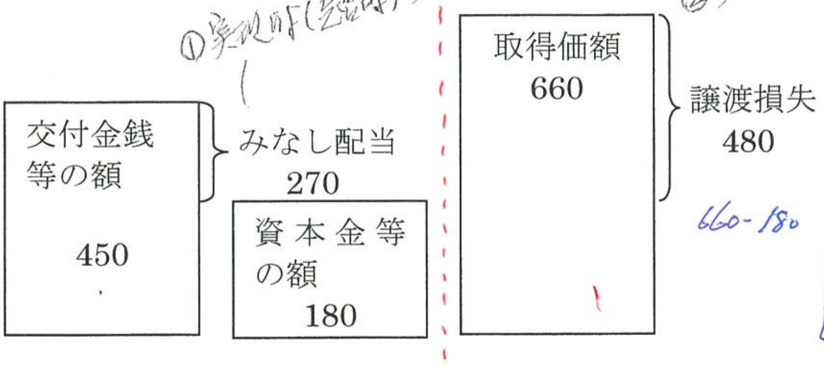
グループ内で移転する部分損益は、外部的には実現しないということか。

正しい考え方

	完全支配関係法人 100%グループ法人	その他 100%未満	備　考
（受取配当）			H22.10.1 適用
益金不算入	あり　100% （配当の計算期間の所有）	あり（~~25%以上~~）　100% （6ヶ月以上所有） 部分あり（所有率 25%未満）50%	~~25%~~以上は関係法人株式と言う
負債利子控除	控除不要	控除必要	
条　件	配当法人（内国法人）	同左	
	受取法人 （配当の計算期間を（6ヶ月以上の期間所有） 通じて完全支配関係が必要）	同左	

100%所有
交付金 450、取得価額 660

自己株取得のみなし配当



100%未満は譲渡損失の実現可能
（税の制限なしにすべて投資回収できる）
→ 譲渡損 480

① 譲渡額 450＝みなし配当（収入）270＋資本金等（回収）180
みなし配当 270＝譲渡額 450－資本金等 180　（益金不算入）

② 従って、譲渡による回収額は、みなし配当 270 を除いた 180 となる
譲渡損失△480＝譲渡回収 180－取得価額 660（損金算入は廃止 会計処理？　13 頁）
税務上損金不算入？

（完全支配は、投資回収が 90%所有より不利か？ 13 頁参照）
（100%未満の有利性は税務上気をつける）

この場合は不利
逆（益）の場合は有利

100%の払戻の仕訳

子会社　利益剰余金 450　現金 450 —
(資本金等)

親会社

現金 450	(株式 660) — 事実 帳簿価格
	みなし配当 270
	資本等 180 — 税法キテイ

(資本等 180)
(譲渡損 480) — 事実 帳簿価格 P/L

↑
損金不算入

グループ法人税制（自己株式の取得等）

H30.02.18
H27.05.25
H25.07.26
H25.06.29
H24.07.27
H22.08.06
H22.03.18

H27改正

	100%グループ法人	その他100%未満	備　考
（みなし配当等） 益金不算入	あり　100%対象	あり　1/3　1/3超（改正前25%超）100%対象 （所有率25%未満）50%〃 5%〃　20%	H22.10.1 適用 ・100%グループとその他で不公平？ ・譲渡損益を計上しないということは？みなし、永久処理？
負債利子控除	控除不要	あり	
株式の譲渡損益	廃止 繰延ではない	あり	・「廃止」ということは？ 損益とも計上しない 益は出るが…

理由？（部門内取引）

損も益も？

(100%グループ法人の場合)
・100% (完全支配は不利？) 益の場合は有利。
株式譲渡損の点で
(投資回収不能分が起きる) 損の場合

IBM事件

・完全支配関係のある法人間で自己株を買い取らせた場合、譲渡損益は損金益金不算入(法61の2⑯)

・譲渡損益部分は資本等の増減項目として扱う(法令8①十九)

自社内の取引？

部門内取引？

P社 →(90%の場合)→ S社

90%所有、対価 450、取得価額 660

(S社の処理)

利益積立金	270	現　金	450
資本金等	180		

(P社の処理)

現　金	450	みなし配当 (益金不算入)	270
		資本金等	180
資本金等	180	S社株式	660
株式譲渡損 (損金算入)	480		

100%の場合（損金不算入）

交付金銭等		取得価額
	株式譲渡損 480	取得価額 660
交付金銭等 450	みなし配当 270	
	資本金等 180	

※100%未満の有利性は、故意に行うと税務上問題にある恐れがある（H22.10前はOK）

株式譲渡直前の配当（NC、OG の場合）

H30.02.18
H26.05.18
H26.01.01
H25.07.26

NAICO の教訓

A　譲渡(益)による場合			B　配当による場合		
	1,000	①		1,000	
	△100			△100	
譲渡益	900		配当	900	①
				↓	
課税	900		益金不算入	△900	
	×40%		簿価譲渡	100	
課税	360		課税	0	
源泉	0		源泉	180	
その後の譲渡	なし			100	②
回収(譲渡 1,000)	1,000	①=③	(配当 900、譲渡 100)	1,000	①+②=③
手取額	640			1,000	

—TAX 株の投資とは、　　　毎年配当を得ていたら、

(1) グループ法人税制でも、譲渡損部分の制約が規定されている。

(2) NC、OG の場合、明らかに配当による方法 B が A より有利である。
それは受取配当の益金不算入という規定(法人擬制説から当然)を使えるからである。

(3) 株式の譲受先においても取得価額 B100 が A1,000 より取扱い易い。

○ 配当してから、譲渡をする。 → わかりやすい。

○ 譲渡時に A ではなくて B になるのではないか、

見抜く経済学　経済

1

2020.01.04

2020.02.03

1. 豚は太らせてから喰え

つまり、資源とインフラ設備は富を生み出す基盤であり、

（インフラ）

実は収穫物よりも重要である

ブタ

ブタ肉

国が富むということはインフラが整備されること

2. 台湾のインフラを整備した日本人技師八田與一

今の日本に必要な仕事

(1) 海外向けのものを作る

(2) 国内向け 〃

(3) ものを海外へ輸出する

(4) 国内市場でビジネスをする

(5) 海外からものを輸入する

3. 利益を生み出すしくみ（インフラ）

4. なぜリーマンショックを予測できたか。

2008年9月 リーマンショック

歴史的な 株価暴落事件

人もいた

2007年 サブプライムローン

米国の住宅バブルを起こしていて

仕組まれた金融商品

低収入者に住宅ローンの貸付 と ローン債権の焦げ付

(米国で住宅価格が上がり続けていた)

5. 当初、世界は

サブプライム問題を 米国の限定的な問題と見ていた

しかし、サブプライムを組み込んださまざまな金融商品が、
欧米の金融機関に広く販売されていた。

6. 経済データは 数ヶ月遅れ

リーマンショック時に適確な情報を流したところはない

逆に ミスリードしていたのかもしれない

7. 新聞に発表される情報は一番古い。

8　メディアが取り上げた段階で

正反対の受け取り方をする

・別の分野で勝負しようと決断

・何故この分野で遅れたのかと反省

情報の二面性

新聞は毎日やって来るので、

そこに載っているのは最新の情報だと

思うかもしれない

—— しかし、現実には、遅れてやってきた情報の集まり

—— 失敗しないための有益な情報

新しい情報

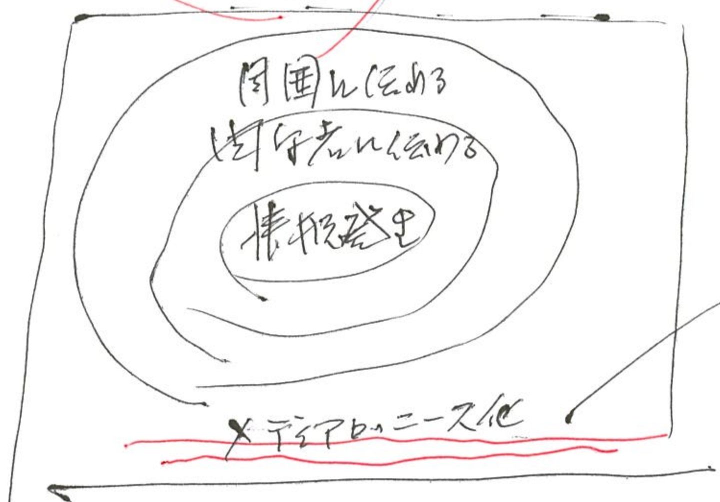
古い

情報

9、本当に価値のある情報とは。

隠されている

人に知れ渡れば価値がなくなる



一番最後の段階!!

将来とは
予測とは
こういうものかも
しれない。

10、役立つ情報を得るためには、

"自分で努力する"

11、不勉強な専門家と経済記者

記者用レクチャーペーパー

コピペ　コピー＆ペースト（切り貼り）

主催者の原文

その分野の専門家

専門会社

第一次的な情報に近い。

建設現場

努力、予想とは別のものかもしれない。

12、サイ監督のような考え方

二年連続甲子園準優勝　1990年 1991年

沖縄を変える。

10、ポジショントーク（自分の有利な話だけをする）

世の中の人はすべてポジショントークしている

現実の社会は、それぞれの人が自分の利益を追求するための発言（ポジショントーク）で バランスが取れるようなシステムになっている。

マッチポンプ式の記事作り。

日本人の好むような海外記事

メディア離れの原因は、

しかし、ポジショントークは自分の首をしめるだけ 批判ではなくて ヴィジョンを示せない、という〜

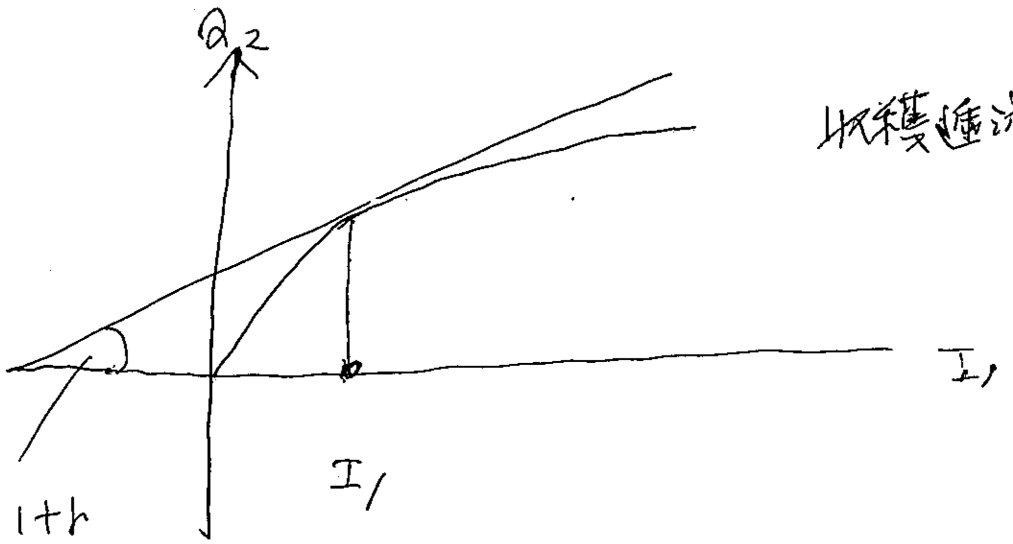
最大化 No.4　企業の投資決定

現在の設備投資を I_1　　現在の利子率

将来の生産量　　Q_2

異時点間の生産関数

$$Q_2 = g(I_1)$$



収穫逓減の性質

現在における財価格を P_1　将来における財価格を P_2

名目利子率を i とすると

π：売上から、投資費用を引いた利潤関数

$$\pi = P_2 Q_2 - (1+i) P_1 I_1$$

この異時点間にわたる最大化問題は

次の形式に当てはめて計算する

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \ \pi = P_2 Q_2 - \underbrace{(1+i)}_{\text{投資費用}} P_1 I_1 \\ \text{s.t.} \quad Q_2 = g(I_1) \end{array}}$$

これを解くと

$$P_2 g'(I_1^*) - (1+i) P_1 = 0$$

$$g'(I_1^*) = \underbrace{\frac{P_1}{P_2}}_{\frac{1}{1+\pi^e}} (1+i) = \frac{1+i}{1+\pi^e}$$

ただし π^e は期待インフレ率を表し、$1+\pi^e \equiv \dfrac{P_2}{P_1}$

として定義される。

ここに、$g'(I) = \dfrac{1+i}{1+\pi^e}$ の両辺を対数変換し、

対数線型近似を適用すると、

$$\log g'(I_1) = \log(1+i) - \log(1+\pi^e) \approx i - \pi^e$$

$$\log g'(I) \approx g'(I_1) - 1$$

$g'(I_1) - 1 \approx i - \pi^e$ が最大化の条件とな

11. 経済レポート専門ニュース

各省庁の白書、レポート

仕組

12 経済の基本構造の把握

(1) なぜそのような問題が起こったのか

(2) その問題が生まれた仕組はどうなっているか

サブプライムローン

米国での低所得者向け住宅ローン商品

↓

低所得者層が住宅購入が可能になる

↓

住宅バブルとなる

債権を買った金融機関は、証券化という高度な手法を使って、サブプライムローン債権を証券化商品の一部に組み込み、リスクが見えにくくした。

— リスクの低い商品として販売された —

12、経済はすべて仕組みで動いている

$\boxed{\text{ヒット商品}}$というものは、たまたま売れたのではなくて、
必ずその前段階で売れる仕掛が作られている。

13、ルールとシステム（経済を動かすもの）

(1) ルール
様々な決めごと（信号）（車、人）

組織化

(2) システム
ルールの集合体（システムとして動く）

巨大化

(3) 世界経済（経済を動かす）

ルールを知り、システムの構造を知る

↓

ルールとシステムを上手に利用する

↓

（ルールを作る）

14. 矢を射てから的を作る

つまり、発想を変える

オリンピックのルールの例

(日本人に不利なルールの変更)

長いスキーを上手に利用する

↓

スキーの長さに制限をかける

↓

ルールが勝敗を決める

↓

ルールは人が作ったものである

15. 生きた経済を動かす景気と金融

生きた経済の状況 ― 景気

↓

全体を考える

ポジティブな考え方

人の気持ち次第

適正な利益がとれるようにする

タイミング

新聞が発表するときには早く

スカイツリー、東京タワーから

建設現場　クレーン

街全体を見る

16. 金融システムの中味

お金は血液

①稼ぐ ②使う ③借りる ④貸す

⑤投資する

お金(血液)が回っている

人がお金を使えば景気はよくなる

17. 株価は先行指標というよりも

短期指標である

18. 金融緩和

金利を下げる

量的緩和

破綻リスク

19. 2008年9月のリーマンショック後 "

米国は、以前の約3、4倍のドルを
市場に流した

日本は、1.4倍だけしか増やさなかった

ドル円は 120円→78円

20、物の値段は、生産コストで決まる

原材料費 —— 国際価格

人件費
付加価値 } —— 対外的な物の
値段を大きく変化
させる

↓

円安になれば、日本製は
国際的に割安になる
(国際競争力が上がる)

2020.02.07 2019.09.30
2019.09.24
2019.09.09
2019.09.02
2019.08.19
2019.06.17
2018.10.23

微分方程式

平成 29 年 7 月 24 日

2019.10.21
2019.11.04
2019.11.18
2019.11.25
2019.12.03

参考図書（Excel で学ぶ微分積分　山本将史著　H24.8 オーム社）
（すぐわかる微分方程式 石村園子著 1997.8 東京図書刊）
（微積分のはなし 大村平著 1985.3 日科技連刊）
（Excel で学ぶ微分方程式　鈴木肇著　H18.2 オーム社）

1．将来予測

微分方程式は、ある瞬間における現象の変化を導関数を用いて表わした方程式である。

⑴ 化石－放射性元素

半減期 $y^1=-ky$
減る速度 y^1 は、現在量 y と比例する。
これを積分すると、現在量 y が求められる。$\boxed{y=C\cdot e^{-ky}}$

（明るい!!　光の暗いところでの明るさと明るい場所との差
暗いところ:1

⑵ 刺激と反比例などの微分方程式

① 刺激が変化するとき、その変化に対する敏感度は、もとの刺激の大きさに反比例する。（ポルノ映画の製作会社）、前作より 1 割以上の興奮度
② 台風の進路予想　ベクトル（その点で進むべき方向と速さ）
③ 解曲線（ベクトルを接線として持つような曲線）
④ 風の流れ、民族の大移動

⑶ 限界速度

落下物は空気の抵抗がないものとすると、落下距離の√に比例して落下速度が増大する。
ビルの屋上から落したリンゴの質量を m とすると、その作用している引力は mg(g は、地表付近の物体を引きつける重力の加速度で $9.8m/sec^2$ である。)

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$　　$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面へ向う速度の変化率（加速度）

しかし、空気抵抗が落下をやめさせる方に作用する。
空気抵抗の強さは物体の速度が比較的遅いうちは速度にほぼ比例し、物体の速度が速くなると速度の 2 乗に比例する。
従って、空中を落下する物体がある速度になると、引力と空気抵抗の力がちょうどバランスして、それ以上速度が増大しなくなる。
これを限界速度という。（パラシュートでの落下速度）

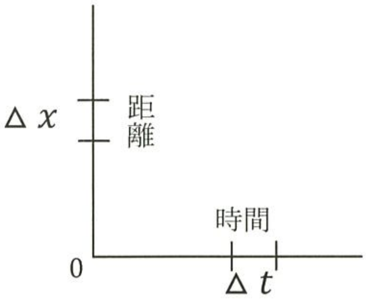
$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt}$　　$k\frac{dx}{dt}$は空気抵抗

$\frac{dx}{dt}$は速度であり、$\frac{dx}{dt}=$ vとすると

$mv=mg-kv$

落下速度

経過時間	t
落下距離	$y = x$
落下速度	$y' = \frac{dx}{dt}$
落下加速度	$y'' = \frac{d^2x}{dt^2}$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

$y' = \dfrac{dx}{dt}$ — 距離の変化 / — 時間の変化 ……落下速度

経過時間 t で距離~~落下速度~~x を微分すると $\frac{dx}{dt}$

例えば $f'x(t) = at^2 + t$ （落下速度）

落下速度 x を経過時間 t で更に微分すると $\frac{d^2x}{dt^2}$

例えば $f''x(t) = {}_2at + 1$ （加速度）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ はリンゴが地面のほうに向って落下速度を増して行くときの“速度の変化率”つまり、加速度を表わす。

速度の拡張

落下速度 $\frac{dx}{dt} = gt(1)$ 　g は重力

位置の変化 $x = \frac{1}{2}gt^2(2)$ 　--- 積分する

(2)から $t^2 = \frac{2x}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$

これを(1)に代入 $gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{dx}{dt} = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$ となる。

すなわち落下速度は $\sqrt{2gx}$

(空気抵抗がある場合)

m, kは比例定数、$-k\frac{dx}{dt}$ は空気抵抗

mは質量
gは重力

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = v$ とすると、

$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ となる。

速度に比例する空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv}$$

この両辺をmで割ると、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg-kv}{m} \quad dv = \frac{dt\cdot(mg-kv)}{m}$$

$$\boxed{\frac{m}{(mg-kv)}dv = dt}$$

これは $f(v)dv = g(t)dt$ となる。

左辺はvだけの関数なのでvで積分することができ、右辺はtだけの関数なのでtで積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると、

$$\int \frac{m}{mg-kv}dv = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k}log(mg-kv) = t + c$$

が得られる。

$$\therefore log(mg-kv) = -\frac{k}{m}(t+c)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$$

$\therefore v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$ となった。

対数関数の微分（導関数を求める）

$$\boxed{\text{導関数の定義式}\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

より

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a (x+h)/x}{h}$$

← 引き算が割り算に!!

$$\boxed{\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\boxed{\log_a M^k = k\log_a M}$$

Mのk乗は$\log_a M$のk倍に!!

ここで、$h/x=k$とおく、$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$となる.

ここで、kが0に近づくと、$(1+k)^{\frac{1}{k}}$は、ある一定の数 e に近づく。

つまり、$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$である。$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$

となり、底aをeにすれば、$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$となる。

逆は $\int\frac{1}{x}\to\log x$

$\frac{1}{2}\left(e^{\cancel{\log 2}}\right)^x = \frac{1}{2}2^x$ $\left(e^{\log 2}\right)^x = 2^x$ 7

一定の倍率で変化する現象を表す

変化率がそのときの量に比例する現象の場合

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

一定の倍率で増加、減少する関数yを表す微分方程式

↓ yでわる

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k$$

↓ xで積分

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int k\,dx$$

↓ $\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{y}dy$ より

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k\,dx$$

↓ 積分する

$$\log y = kx + C$$

$y = e^{kx+C}$

$= e^{kx} + e^{C}$

$e^C = A$として

$= e^C = A$とすると

↓ 指数の形へ

$$y = Ae^{kx}$$

倍々の法則より、

$x=1$のとき$y=1$

$x=2$のとき$y=2$だから

$$\begin{cases} 1 = Ae^{k} & \cdots ① \\ 2 = Ae^{2k} & \cdots ② \end{cases}$$

②÷①より

$$e^k = 2 \quad \cdots ③$$

よって　$k = \log 2$ $= \log_e 2$

これを①、③に代入

$1 = Ae^{\log 2}$、$e^{\log 2} = 2$

より、$A = \frac{1}{2}$

これを$y = Ae^{kx}$に代入して、

I.n

$$y = \frac{1}{2}e^{x\log 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\log 2}\right)^x = \frac{1}{2}\cdot 2^x$$

$$= 2^{x-1}$$

倍々の法則の式が導き出された

$e^{\log 2} = 2$　$e^{\log 3} = 3$　$e^{\log 4} = 4$

$\frac{1}{2}\cdot 2^x = 2^{x-1}$

森羅万象と経済現象を表現できる

(1) 微分方程式

ある瞬間における現象の変化を $\boxed{\text{導関数を用いて表した方程式}}$

瞬間の変化を"次々につなげて行く" …… 結果が生まれる

微分方程式を解くのが積分である。そして指数関数、対数関数も重要な役割を演じる。

(2) yの変化率がその時点のyに比例する現象を表わす微分方程式である

ある時間xから、短い時間Δxだけ経つ間に、yは
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ だけ変化する。

変化率は、時間の間隔Δxを0に近づけたときの極限だから、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ である

この式をy'や$\frac{dy}{dx}$と書きyの変化率という

(3) 分析したい現象

→ $\boxed{\text{導関数で表す}}$ → 微分方程式

← 積分

$\boxed{\text{微分方程式の解}}$ → 現象の解明

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad ①$$

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \cdots\cdots ①$$ （微分方程式）

①の解は　$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = k$ となるから、

xで積分して

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int k \, dx$$ である。

この式の左辺は、$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{y} dy$ となるので

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx$$ となる

$\frac{1}{y}$は積分すると $\log y$
（導関数の定義式）

左辺をyで、右辺をxで、積分して

$$\log y = kx + C$$ （Cは積分定数）となる

? この導し？

これを指数の形に直して

$$y = e^{kx+C} = e^{kx} e^{C} = Ae^{kx}$$ （e^CをAで表わす）

つまり、関数 $y = Ae^{kx}$ が微分方程式①の解である

この式から倍々の法則、xが1増えるとyが2倍になる式

$y = 2^{x-1}$ が導かれる

ロジスティック曲線

(1) 人口増加などは指数関数に従わない

人口増加、品物の売れ行きなどは飽和状態があり、それ以上には増えない。

(2) 飽和状態 P があるとすると

$P-y$ は、y が P に近づくと 0 に近づく、従って

$$\frac{dy}{dx} = ky(P-y) \quad —② $$

という微分方程式となる

(3) $\dfrac{dy}{dx} = ky(P-y)$、両辺を $y(P-y)$ で割ると

$$\frac{1}{y(P-y)}\frac{dy}{dx} = k$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{P-y}\right)\frac{dy}{dx} = k$$

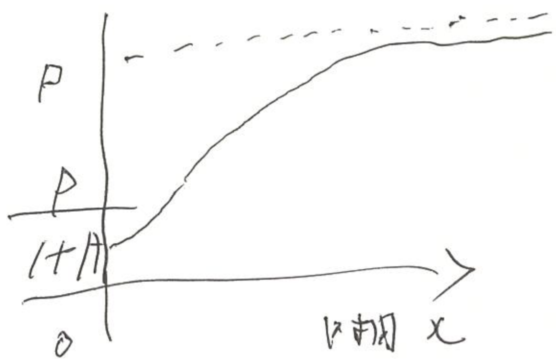
$$\frac{1}{P}\{\log y - \log(P-y)\} = kx + C$$

$$\log_e \frac{y}{P-y} = kPx + CP$$

$$\frac{y}{P-y} = e^{kPx+CP}$$

$$y = \frac{PBe^{kPx}}{Be^{kPx}+1}$$

$$y = \frac{P}{1+Ae^{-kPx}}$$



指数関数の微分（導関数）

指数関数 $y = a^x$ の微分

↓ 両辺を対数で表す（対数微分法）

$$\log y = \log a^x = x \log a$$

①左辺

$\log y$ と $y = a^x$ の合成関数

↓ y で微分　　↓ x で微分

$$(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

②右辺

x で微分すると

$$(x \log a)' = (x)' \cdot \log a$$

$$= 1 \cdot \log a = \log a$$

$y = x$ なら
$y' = (x)' = 1$
の公式

↓

$\frac{y'}{y} = \log a$ より　$y' = y \log a$

$= a^x \log a \longrightarrow y' = a^x \log a$

上記の $y = a^x$

指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ は微分しても変わらない

底が e の場合

$$(e^x)' = e^x$$

微分しても変わらない

底が e でない場合

$$y' = (a^x)' = a^x \log a$$

微分方程式

m　mass 質量　物体が有する固有の量
物体の重量とは区別される

g　gravity 重力　地上で、物体を地球に引く力

1、高層ビルの屋上からリンゴを落下させたとき
リンゴに作用している力は "引力" だけである。

2、その大きさは、リンゴの質量 m と重力 g をかけたものである。

3、重力 g とは、地球が地表付近の物体を引きつける力、
物体に発生する加速度の大きさで重力の加速度と呼ばれ、
$9.8\,m/sec^2$ である。

4、重さとは、質量 m の物体を地表付近にもってくると mg の重さになる
従って、質量 m のリンゴは、地表付近では mg の重さを持っているので
リンゴを地球のほうへ動かそうとしている力は mg ということになる。

5、リンゴに mg の力が作用しているとき、
その力でリンゴに起こさせる加速度（速度の変化率）は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \qquad (9.17)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ は、リンゴが地面のほうに向かって速度を増して
行くときの "速度の変化率"、つまり加速度を表わす。

6、加速度

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$$

両辺を m で割って $\frac{d^2x}{dt^2}=g$ を得る　(9.18)

7. 加速度から、速度や変位(位置の変化)を求めると

(9.18)の両辺を t で積分し、

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \int g\,dt$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ は、x を t で2回微分したものなので、

これを t で積分すると、微分1回分だけ元へ戻って

$\frac{dx}{dt}$ になる。

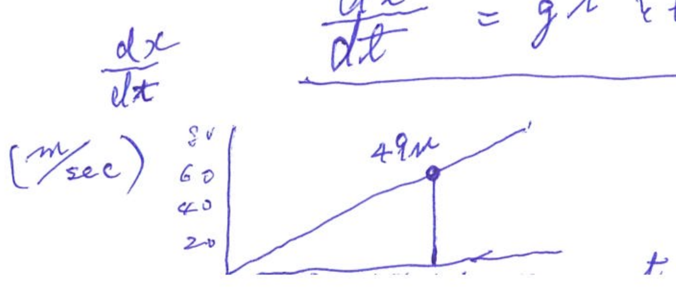
$$\frac{dx}{dt}=gt+C_1 \qquad (9.19)$$

C_1 は、どこから積分をはじめるかによって決まる積分定数であり、$t=0$ から始めるとすると

$\frac{dx}{dt}=0$　$C_1=0$ となり

8. 落下速度は

$\frac{dx}{dt}=gt$ となる　(9.20)



g は 9.8m/sec² であり、速度は時間の経過につれて増加しており5秒後には、49m/sec に達する。

指数、対数

2020.01.13
2020.02.03

ローンの月々返済額

① a円を利率rでnヶ月借りたときの元利合計 $X = a(1+r)^n$ 円 ①

② 利率rで月々 x円ずつ返済したときの

nヶ月後の元利合計の返済額 X

$x + x(1+r) + x(1+r)^2 + \cdots + x(1+r)^{n-1}$

$$X = \frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)-1} = \frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

② $\dfrac{x\{(1+r)^n - 1\}}{r}$ 円

ゆえ、①=②になり。

$$① \; a(1+r)^n = ② \; \frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

$a = 1{,}000{,}000$　$\underset{\text{月利}}{r = 0.02}$　$n = 30$ とすると

$$1{,}000{,}000(1+0.02)^{30} = \frac{x\{(1+0.02)^{30} - 1\}}{0.02}$$

$$1{,}811{,}362 = \frac{x(1.02^{30}-1)}{0.02}$$

$$x = 1{,}811{,}362 \times 0.02 \,/\, (1.02^{30}-1)$$

$= 44{,}149$ 円 となる。

$y = a^x$ —① の導関数を求める

両辺の自然対数をとると

$\log_e y = x\log_e a$ となり、両辺を微分する

(1) ここで 左辺 $\log_e y = u$ とおき、

$y' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{y}\cdot y' = \dfrac{y'}{y}$ とする

左辺は $(\log_e y)' = \underline{\underline{\dfrac{y'}{y}}}$ となる

(2) 右辺は、$(x\log_e a)' = \underline{\underline{\log_e a}}$

$x' \to 1$

(3) (1)、(2)から $\dfrac{y'}{y} = \log_e a$　　$y' = y\,\underline{\log_e a}$ —② となる

(4) ① $y = a^x$ から ②は

$y' = \underline{a^x\log_e a}$

(5) $y = e^x$ から　$y' = y\log_e e = e^x\log_e e = e^x \times 1 = e^x$

---

① $y = a^x \longrightarrow y' = a^x\log_e a$

② $y = e^x \longrightarrow y' = e^x$

③ $y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\log_e a}$

④ $y = \log_e x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

e^x の導関数　e^x となる

e^x の導関数は、$y = e^x$ の導関数が基本となる。

x から $x+h$ までの平均変化率は、

$$(e^x)' = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \frac{(e^h - 1)}{h} e^x$$

h を小さくしていくと $\frac{(e^h - 1)}{h}$ はしだいに 1 に近くなってゆく。

従って

$$(e^x)' = \frac{e^h - 1}{h} e^x = e^x$$

$e^{0.0001} - 1 = 0.00010005$ と h を小さくしたものと同じになる

$$\frac{e^{0.0001} - 1}{0.0001} = \frac{0.00010005}{0.0001} \fallingdotseq 1$$

複雑な指数関数 $y = e^{x^3 - 5x^2 + 4x}$ の導関数は、

次の 2 つの関数に分解する。

$y = e^z$,　$z = x^3 - 5x^2 + 4x$ とする。

ここの部分は、

$y' = \frac{dy}{dz} = e^z$　$z' = \frac{dz}{dx} = 3x^2 - 10x + 4$ であるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = e^z(3x^2 - 10x + 4) = (3x^2 - 10x + 4)e^z$$

よって、$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 10x + 4) \cdot e^{x^3 - 5x^2 + 4x}$ を得る。

$2^3 = 8$

$\log_2 8 = 3$

$e^{at+C} = x$

$\log_e x = at + C$

$\rightarrow x = e^{at+C}$ 8 −3

積分を実行すると、

$$\log x + C_1 = at + C_2$$ となる

$$\log_e x = at + C_3 \quad (C_2 - C_1 = C_3 とする)$$

この式は

$$e^{at+C_3} = x$$

すなわち

$$x = e^{at} \cdot e^{C_3}$$ を表わす。

$t = 0$ のとき $x = A$ とすると $e^{C_3} = A$

$$x = Ae^{at}$$ の関係となる

これが、t の関数としての x の形である。

たとえば、1分あたり $\frac{1}{10}$ の割合で増殖している細菌の一群がある。1時間後には何倍にふえているか

$a = 0.1/分$

$t = 60分$

$$Ae^{0.1/分 \times 60分} = Ae^6 = 403A$$

1時間後に403倍となる。

10日で1割の利上へ

365日でいくらか

$a = 0.1/10日$

$t = 365日$

$Ae^{\cancel{0.1/10日}\,0.01 \times 365} = 38.47A$

$1.1^{\frac{365}{10}} = 32.42$

PLUS

指数関数 $y=a^x$ の微分公式の証明

任意の $a>0$ に対して、$y=a^x$ の導関数は、$y'=a^x\log a$ である

又は $y'=\log a\times a^x$

（底は e）

一般の指数関数 a^x を、扱い易い指数関数 e^x に帰着させることが大切

(1) 定義に従って求める

a^x の導関数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$

$\displaystyle=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

追加する

ここで、$a^h=e^{\log a^h}$ となり、上式は

$$a^x\lim_{h\to 0}\frac{e^{\log a^h}-1}{\log a^h}\cdot\frac{\log a^h}{h}=a^x\cdot 1\cdot\log a$$

（上記は $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ により $\displaystyle\frac{e^{\log a^h}-1}{\log a^h}=1$,

$\displaystyle\log\frac{\log a^h}{h}=\frac{h\log a}{h}=\log a$ ）

(2) 対数微分法により求める

$y=a^x$ の対数を取る：$\log y=x\log a$

両辺を微分：$\dfrac{y'}{y}=\log a\Rightarrow y'=y\log a$

よって、$y'=y\log a=a^x\log a=\log a\times a^x$

NO.

DATE

2、指数関数の微分

$\boxed{(1)\ y=a^x}$ ①　$\longleftrightarrow$　$x=\log_a y$

底がaの場合　$y=a^x \rightarrow y'=a^x \log_e a = a^x \log a$　①′

底がeの場合　$y=e^x \rightarrow y'=e^x$　①″

(1) 両辺の自然対数をとると

$$\underline{\log_e y} = \underline{x\log_e a}$$

(2) 両辺を別々に、$\underline{x}$について微分する

左辺は、

$\log_e y = u$とおき、

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'$$

$$=\frac{y'}{y}$$

(3) 右辺は、$(x\log_e a)'=\log_e a$

xが1になる

となることから

①の微分は、$\frac{y'}{y}=\log_e a$

左辺の y'/y から

$\frac{y'}{y}=\log_e a$から

$y'=y\log_e a$ ②

①が $y=a^x$なので

$y'=a^x\log_e a$ ①′

又は$(a^x)'=a^x\log_e a$

指数関数の底をeを用いると

$y=e^x$から、$y'=y\log_e e=e^x\log_e e=e^x\times 1=e^x$

$y'=e^x$ となる ①″

2. 減衰関数

(1) 目べり…減衰関数

ある期間ごとに、αの率で減額がおこると
x期間後の残高は

指数の場合

単利の場合 $y = A(1-\alpha x)$ $A(1+\alpha x)$

複利の場合 $\boxed{y = A(1-\alpha)^x}$ $A(1+\alpha)^x$

$20 = 105(1-x)^{41}$

$20 = 105(1-0.040)^{41}$

(19.693) 不一致 ②

ボートのオールを漕ぐのを止めると、
ボートの速度は、そのときのボートの速度に比例して
(複利的に)減少する。

ある物体に含まれている放射性物質の量も
その物体が誕生してからの年数で減少する

連続的に複利で減少する現象 $y = Ae^{-at}$

ある期間をk等分して、それぞれa/kの率で減額してゆけば、
ある期間後には1の元金が、

$20 = 105e^{-0.04\times 41}$

$\left(1-\frac{a}{k}\right)^k$ になっている。 $20 = 105\times e^{(-0.040\times 41)}$ (20.367)

1ステップだけ減少した額に等しい筈であるから αとaの間に

$1-\alpha = \left(1-\frac{a}{k}\right)^k$ の関係がある。

(2) 指数関数と同様に

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^{k} = e^{-a}$$ となり、

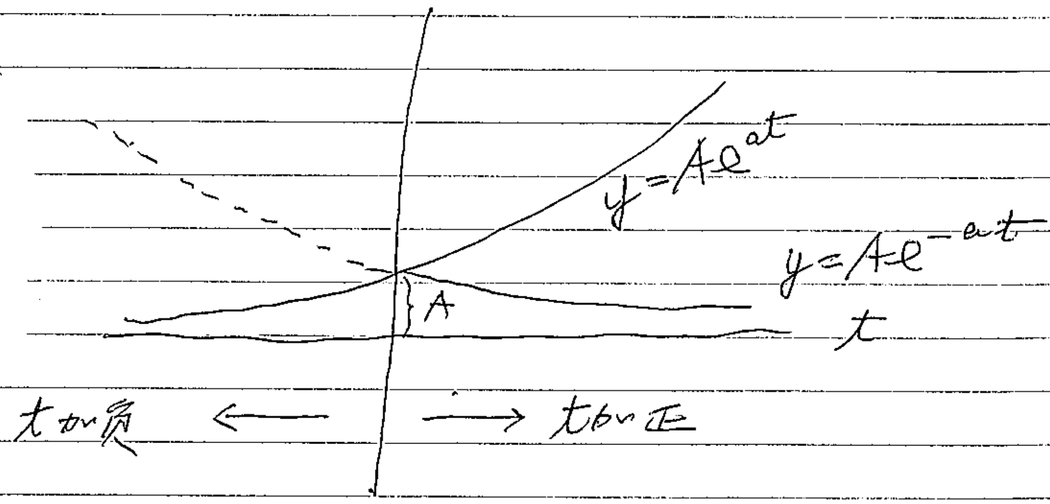
$1 - \alpha = e^{-a}$ が得られ

これを前頁の

$y = A(1-\alpha)^{t}$ に代入すると

$$\boxed{y = A(e^{-a})^{t} = Ae^{-ax}}$$ となって、

連続的に複利で減衰する場合の式が得られる。



(4) ポロニウム210の場合

この場合、10日後に0.95gとなっていた

ポロニウムの半減期は.

$$y = e^{-at}$$

y --- g

t --- 日

a --- 減少率

$$0.95 = e^{-a \times 10}$$

e^{-x}が0.95になるようなxは約0.05であり

$$a \times 10 = 0.05$$

$$a = 0.005$$

$$0.5 = e^{-0.005t}$$

e^{-x}が0.5になるようなxの値は0.69

$$0.005t = 0.69$$

$$t = 138 \ (日)$$

(5) 連続的に複利で減衰する現象は、

$$y = Ae^{-at}$$

ただし、Aは$t=0$の最初のときのyの値

従ってAが半分になる時点は、

$$\frac{1}{2}A = Ae^{-at}$$

$$\therefore \quad 0.5 = e^{-at}$$

そして、この時

$$at = 0.69$$

仮に半減期をThとすれば

$$aTh = 0.69$$

$$Th = 0.69\frac{1}{a}$$ が成立する。

aはラジウム226では、0.00043

ポロニウム210では 0.005であったように

対象の性格によって定まる定数である。

(6) 平均寿命

平均寿命を T_m とすると

$$aT_m = 1$$

$$\therefore T_m = \frac{1}{a}$$

半減期 $T_h = \frac{0.69}{a} = 0.69T_m$

平均寿命 $T_m = \frac{1}{a} = 1.45T_h$

半減期は平均寿命の0.69倍，平均寿命は半減期の1.45倍

すくい始めてから10分後に、水槽内の小魚は半分に減ってしまった。

小魚の平均寿命は　$10分 \times 1.45 = 14.5分$　である

隠れ場のない広野で作業中、巨大なひょうが降りはじめ、

1分間に10%の人たちが倒れた。

50%の人たちが倒れるのは何分後か。平均寿命はいくらか？

$$0.9 = e^{-a \times 1分}$$

$$a \times 1分 = 0.1$$ (巻末の指数関数表から)

こうすると　半減期 $T_h = \frac{0.69}{a} = 6.9分$

平均寿命 $T_m = \frac{1}{a} = 10分$