(第1回) FTPL、MMT、デフレ

2020.01.06
2019.09.02
2019.08.24

物価水準の財政理論
FTPL

プリンストン大学シムズ教授
(ノーベル経済学賞受賞者)

もし、その国の国債の債権者のほとんどがその国の者であるならば、財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、①物価は緩やかに上昇(インフレーション)し、それが常態化することで②財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的である、とするものである。

これは、将来に向って財政再建を放棄することによって、現在のインフレ率を高めることが目的とされている。
その基本は、名目国債残高を現在の物価で割った値が、将来にわたる実質財政余剰の現在価値の期待値に等しいという関係式である。

名目国債残高/今期の物価水準＝実質財政余剰の現在価値の期待値

ここで、財政余剰とは、「政府収入―政府支出―支払利子」であり、基礎的財政支出に近いものだ。
P/L的に言えば、経常利益と営業利益の差のようだ。

邓小平.

現代中国を理解するための必読書

中国を理解するための必読書　ケ02.　エズラ・ヴォーゲル

日本への警告

ジム・ロジャース
2019.12.28

1、すでにアメリカの好景気は10年以上続いて
史上最高である
しかし、歴史的に考えれば、景気循環で不景気になることは明らかです。
"世界経済は悪化する"

2、アメリカの国債の価値が、相対的に下がり、金利が上昇する。
金利が上がれば、世界中で経済の停滞が進みます。
アメリカの

3、もうすでに、景気後退は始まっているのです

4、GAFA（グーグル、アップル、フェイスブック、アマゾン）は
世界で規制のターゲットとなり、今後も成功が長続き
するかどうかわからない

5、21Cは中国の時代
20Cに一番成長した大国はアメリカでしたが、
そのアメリカでも何度も経済停滞を経験しました。
中国も同じです

6、オリンピックが国家にとって金儲けになったためしはない。

7. 少しずつ力を加えた小枝が
やがて ポキリと折れるように、
取り返しがつかなくなってから、多くの人が"しまった"と気付く

8. 戦後長らく、日本では誰もが規律正しく、
懸命に働き、高品位の製品を作り続けてきた。
そして、国の借金も少なかった。

ところが、
9. バブル後の1990年頃からは、
日本は"金にくれた巨人"となった。

10. 多額の借金をかかえながら速く走るのは難しい。
日本はそういう状態になってしまった。

11. 1955年以来、自民党の政治家は、いろいろな公共工事を
続けて、財政赤字を膨らませてきた
その悪しき伝統により日本の状態を悪化させた。

12. 日本は年々恐ろしいペースで借金を増やしている。

この10年間で近隣のアジア諸国がどれだけ力をつけたかを考えると、日本との落差には目眩いを感じた。

13. 日本はまさに内側から蝕まれている。

14. 問題は、日本政府が、政権を維持するために、破産しそうな企業を助け、国民の失敗の尻拭いをしていることだ。

15. 日本は失われた20年の間に、失敗を克服するどころか後退してきた。

16. 資本主義の優れた点である、現場の若い成長を育てる方向と逆を走り、古い人たちを守ろうとして、今の惨状を招いた。

22、(日銀)政府が輪転機を回すとき、
お金が最初に向かう先は 株式市場である

23、現在の日本の立ち位置は、
イギリス、ポルトガル、スペインといった
凋落した覇権国と同じである。

約100年前 1918年当時のイギリスは
世界一の覇権国だった
しかし、イギリスは帝国主義時代の後ろ盾があり、人口減少もなかったので
衰退のスピードは緩やかなものだった

ところが日本には より激しい変化が待っている

24、オリンピックは日本全体を救うことはない。
むしろ弊害を及ぼす。
結局、オリンピックのせいで日本の借金は
さらに膨らむ。

35. 小さな変化が積み重なってトレンドとなる

その変化の背景

↓

未来予想　予測

36 触媒とは …… 未来予測の基礎

トランプ政権の誕生 — 良くない触媒

アベノミクス …… 日本をより難しい状況に
少子化　　　　　導いている

プーチン …… ロシアの投資先としての変化

コロンビア …… 麻薬合法化

経済学③

2019.08.24

現代貨幣理論
(MMT)

Modern Monetary theory

1. 自国通貨建の国債は破綻しない
2. 政府の負債は国民の資産
3. 銀行は貸出によってお金を作ることができる
4. お金は物ではなくて情報(経済力に裏付けされた)
5. 日銀は、2013年から6年間で400兆円の国債を買取り、2016年には金利の引き下げも行ったが2%の物価上昇は達成できなかった。
6. 一旦、インフレ傾向になりかけたが、2014年の消費増税でまた下がった。
7. MMT　modern monetary theory
8. インフレの原因を明確にして、それに対応できれば問題はない。
   インフレ＜所得増加ならOK

日本がデフレ対策ができなかったのは何故か ？

(1) 政府債務が過大であったからか

(2) だから需要拡大　ができなかった

〃 財政支出の拡大　〃

〃 減税　〃

(3) 要は、財政支出ができなかった。

↓

だからMMTの議論が必要ではないか

FTPL

9. MTT

(1) 自己通貨を持つ政府は、財政的な予算制約に直面することはない

― 国債をいくらでも発行できるし、それによって破綻することはない

(2) 全ての経済及び政府は、生産と需要について物あるいは環境的な限界がある

― 急激なインフレにならない限りは限界はない

(3) 政府の赤字は、他の経済主体の黒字である

― 政府の借金や支出は、国民の財産や収入となる

連結 B/S

資　産	負　債
0	0

紙幣を発行して返済する必要もない

(4) 連　結

政府の B/S

	負　　債
	国債 1,000 兆円

日銀の B/S

資　　産	負　　債
国債 1,000 兆円	民間銀行からの債務 1,000 兆円 (国債の買取分)

日本政府は、その返済能力に限界はない!!

理由は、借金の返済に必要な通貨を発行しているのは政府だから。

政府の財政赤字は、それと同額の民間部門の貯蓄を生み出す。

政府の財政赤字は、民間部門の貯蓄によってファイナンスされているのではない。

信用貨幣論によれば、

資金量の制約はないが、借り手の返済能力という制約はある

5、グリーンスパン議長の下でのFRB

(1) グリーンスパンは、1987.8〜2006.1まで 18年半
FRB議長を務めた
この間は米国のGreat Moderation（大いなる安定）と呼ばれる
低インフレ、安定成長の時期であった。

(2) 87.10のブラックマンデー、94末のメキシコの金融危機
97のアジア通貨危機などの次々に乗り切った。
その手腕は maestro（名指揮者）と称された。

(3) 2006.6に0.25%の利上げがあり、（連続17回の利上げ）
5.25%となり、その後2007.8まで続いた。

(4) この利上げにより、懸念されてきた「住宅バブル」が
いよいよはじけることとなった。
全米の住宅価格は2006までの10年間で1.8 2.5倍程度
大都市では、3倍以上上昇した。
07はじめからから下落が始まった

(5) 資産バブルに対するグリーンスパン主義は、
① バブルの気配があるとしても、それを技術革新による
技術ショックの識別は困難である
② 例え識別できたとしても、バブル潰しに大した効果は期待できない
③ もし引締を行うなら、景気安定化を損なう位の引締めが必要である
④ 崩壊に伴う事後的措置のコストの方が低い

8、長期的趨勢と公的債務管理の現状

(1) 中央銀行は、社会の長期的趨勢に合わせた
金融政策への変容を余儀なくされる

(2) 少子・高齢化

わが国における65才以上の割合は

1970年	7.1%	(1.0)
80	9.1	
90	12.1	
2000	17.4	(2.5)
2010	23.0	(3.3)
2020	29.1	(4.1)
2050	38.8	(5.5)

(3) 年金制度の破綻

(4) 家計貯蓄率の低下

(5) 予期しないインフレーションのリスク

(6) マクロショック（自然災害）

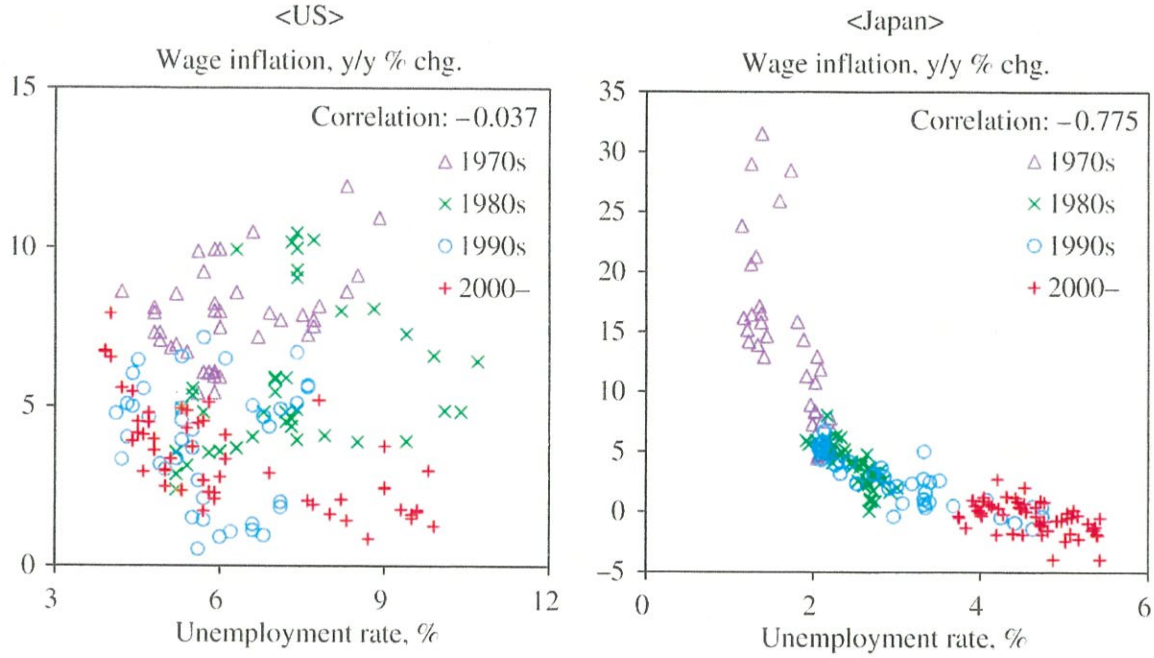
1970－2012年 全世界被災者 1.6億人

1970年と比較して 発生件数で3倍、被災者で2倍

（金融危機）

(7) 日本の公的債務

「高圧経済」？



Muto and Shintani."An Empirical Study on the New Keynesian Wage Phillips Curve: Japan and the US" *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 2017.

中央銀行の非伝統的金融政策

目的

a. インフレ期待に働きかける

b. 金融機関のリスクテイクを促す

手段

1. マイナス金利
2. バランスシートの拡大
3. 長期国債の購入

経済

東京五輪後の日本経済

参考資料：（東京五輪後の日本経済 白井さゆり著 2017小学館刊）

（非伝統的金融政策の経済分析 竹田陽介・矢嶋康次著 2018日本経済新聞社）

○ 学習点

2019.10.07
2019.10.15
2019.10.22
2019.10.28
2019.11.04
2019.11.11
2019.11.25
2019.12.03
2019.12.16
2019.12.30
2020.01.06

基盤が崩れないか？

日米貿易の

2013.12 安倍政権

2014.2

1、異次元緩和

（円 80～100 / 株 8000～10000）2013（100～110 / 10,000～23,000）

1）高騰する都心の不動産価格

① 日本銀行の異次元緩和（大量のマネー供給）

② 東京五輪開催決定（将来への期待）

1986～1991のバブルの思い出（全国的不動産高、日経38,957円）

今回は局所的・東京中心

実需を伴わない不動産建設ブーム（需要が見込まれていないのに）

2006～2007のミニバブル リーマンショック

実質的な需要を伴っている

今回 2017～ の

空虚で危険な建設ブーム

③ 不動産向け貸出

節税対策

個人のアパート等賃貸建設の増加

都心のオフィスビル建設

都心の一部

局所的現象

バブル化とは違い

実需を伴わない

住宅供給

① 実需はあるか

地銀のアパート建設融資の増加

対前年 ？％

不良債権化のおそれ

問題点

今後、アパートの居住者が大きく増えない見通しの中で

実需を伴わない住宅供給

節税商品としての賃貸建設

将来の供給過剰

日本の世帯数の減少が始まったとき

単独世帯を中心に増加傾向の世帯数も 2020年頃から減少へ

空室保証の罠（家賃相場と連動）

空き家の増加

④ タワーマンションは投機か

高い価格は、建設現場の人手不足と輸入建築資材の高騰

~~②~~ 日本の世帯数

人口減たが変化少

結局 1人世帯化

↓

買物 → 外食、レストラン

料理 → 購入、コンビニ

実需の基礎、基盤

⑤ ヨーロッパの住宅事情

大規模な金融緩和

住宅の不足 （移民や難民の大量流入）

実需があるから不動産価格が上昇

バブルとは実需を完全に無視した価格水準

(2) 日経平均 2万円はバブルか

2008〜2012の平均株価

8000〜10,000円

戻ったとは言え過去の 6割 程度

米国など世界は、最高値を更新中

① 株価収益率 PER（株価収益率）

PERで判断しなければならない

時価総額 ÷ 純利益

又は、株価 ÷ 1株当たり利益

外国人主導の株価

② 株価は外国人主導で動いている

80年代は日本人主導

③ 株高と円安 → 株高

比較グラフ

円ドルレート×200 = 株価

③ アベノミクス

・大胆な金融政策

・機動的な財政政策

・民間投資を喚起する成長戦略

✓ 外国人投資家は円安の予想

円売り → 円安

✓ 大胆な金融政策により、輸出産業

はじめ、株価を上がると予想

株購入 → 株高

④ 円安と株高

「大規模な金融緩和政策」によって、今後、円安になり、日本の輸出産業の

株価が上がるに違いないと考え

—— 円を売り（円安）、日本株を買う（株高）

⑤ 持合株の解消と外国人株主の増加

長期的投資から短期的投資（3年）

将来の株価暴落の主因は外国人投資家

⑥ 円安

② ETF

② ETF（株式の市場からの大量購入）は世界で初めての実験

円高 ― 輸入企業が儲かる

円安 ― 輸出企業が儲かる。

日本銀行のETF（指数連動型上場投資信託）の購入

数千億円 :2012 → 7兆円/2016

日本株では世界第3位の株主

年金積立金管理運用独立法人（GPIF）

2014.3 21兆円 → 2017.6 36兆円

日本株の最大株主

⑦ コーポレートガバナンスの後退（利益）

2019.9 日銀の総資産 569兆円

法令の遵守と効率的な経営

巨大な物を言わない株主

日銀 ETF 15兆円（10% →） GPIE 36兆円（25%）

毎年6兆円増える

④ 日本の株主（2020.11）

日銀（ETF）40兆円（6%）

GPIE（年金管理）36兆円（6%）

⑧ 日銀がETFを売るとき

② 永久に買えるか いつどのように売るのか

今後どう手仕舞う日銀のETF購入（毎年6兆円）

リスク資産（ETF、REIT いくら兆円の株式…

日本銀行のリスク資産

② 日本銀行は売る決断にならないか

⑤ リスク資産の大きさ

② 外国人投資家による売り崩し

2020 国債 480兆円 ETF 27兆円 〉 507兆円 総資産の89%（569）

純資産 4兆円

1%で 5兆円

大企業のガバナンスの甘さ

6、アジアの台頭、世界の繁栄はアジアにシフトする

2015年　世界GDPの　30%

2040年　〃　50%

日本の経済は、対アジアが重要化

2012年　貿易相手国
アジア　50%
（中国　20%）

―― アジアのダイナミズム ――

太平洋戦争中に行ったこと

(1) 韓国

(2) 中国

(3) アジア近隣諸国

その事実を踏まえた上でポジティブな行動を起こすことの必要性

深呼吸をして歴史の英知に学ぶ必要性

2012.12 第二次安部内閣 4
白川総裁の退任 2013.1
(1) 過度な円高
(2) 金融緩和の不足

3、日本経済の不都合な真実

(1) デフレからの脱却　1990年代〜　(3) リスクをとらない

デフレとは、モノやサービスの価格が継続的に下がっていく経済状態

↓

顕著に従業員の給与が下がる

企業の販売価格が上がらない

⑥ 異次元緩和の効果
(1) 極端な円高の是正　1ドル 80円→1…
(2) 〃 株安 〃　10000円→20…
(3) 失業率の改善　3%を切る
(4) 金利水準の低下
効果がなかったこと
(1) 経済成長率が上がらなかった
1.2〜1.5% → 1.2%
(2) 賃金上昇の低下
(3) 物価上昇はなかった
＜家計が認識する物価変化率
(物価が上がっている)

(2) デフレマインド

企業や家計のデフレマインド

統計上の物価指数
(ほとんど価格上昇なし)

OECD
世界で
日本だけデフレ

人件費が上がらない

⑦ デフレは消費者国民の不安

~~(3) 日本経済は、金融緩和政策によって~~
~~たくさんの需要を作り出せる — 体質ではなくなってきている~~

一日本型デフレ一の真の要因
消費者心理との乖離　$\boxed{\text{国民の不安}}$

日本だけデフレがなぜ脱出できないのか

高齢化の進展、働き手の減少
バブル後の暴落の大量住宅の手控え
膨大な政府債務
将来に対する不安

5. 世界経済のゆくえ

(7) 中国経済の問題点 Ⓐ.Ⓑ.Ⓒ

A

① 企業債務の問題 過剰債務

地方政府出資の投資会社の債務、民間企業の債務

GDP比で170%〜200%（2,500兆円）

② 家計債務

住宅価格高騰、住宅ローン債務

約600兆円（政府債務600兆円）

③ 公的、民間の総債務（2,500〜3,000兆円）

④ シャドーバンキング

銀行もかかわっている

B

⑤ 企業の過剰生産能力

リーマンショック後の景気刺激策

⑥ 鋼鉄産業の過剰生産能力

5年間で1億〜1.5億トン削減目標

＝日本の年間粗鋼生産量

↓

大量の失業者の発生

順大学
に在籍
コーヒー

C

⑦ 資本流出の問題

2015年 約1兆ドル 海外流出

日本のGDPの $\frac{1}{5}$、100兆円

外貨準備

↓

減少した

⑧ 人民元売りの心配

高い成長
高い金利
→ 成長の減速
経済問題

世界からお金が集まる
人民元高

人民元安へ
人民元売り

⑤

⑨ 中国発のリーマンショックは起こるか

民間経済主導の経済ではなく
政府主導の経済
中国は、日本と同様、外国資本に依存していない

購買力平価（国内のモノやサービスの購買力）では
中国はアメリカを抜いて第一位

（中国 大体 国有企業
民間主導ではない

17

⑥ 東京五輪後の為替（為替）

(イ) いったんは 円高方向か

(ロ) 為替変動要因

1、2国間のインフレ率の差

2、〃 経常収支の差

インフレ国の為替は下落しやすく
デフレ国 〃 上昇しやすい → 将来の円高

経常収支の赤字国は 下落しやすい
〃 黒字国 上昇 〃 → 将来の円高

⑦ 五輪後の円の大暴落

国の借務残高

対GDP比

2019	200%
2030	300%
2040	400%

→ 円の大暴落

(3) いよいよ始まる企業淘汰

① 現状の日本

供給力 ―― 需要力

バランス

＝

設備の老朽化

生産能力の限界

衰えつつある需要

企業淘汰

淘汰

高い生産性を持つ企業だけが残る

~~地域、国境が当り生産性が～～～~~

なられば淘汰される

沖縄企業の低生産性も、淘汰で解決できる

今では……

② シェアリングエコノミー

無理して買わないでもいい

頑張ることもない

縮小する需要

④ 東京五輪後の金融危機（不動産価格）

金融危機のパターン

(イ) ノンバンク中心の金融危機

ノンバンクが過度にリスクをとった場合

(ロ) 各国の中央銀行が緩和政策を実行し実行に移した時期

2008年以後の 大規模な金融緩和政策

中央銀行が市場から大量の資産の買入れ

これが資産価格の上昇をもたらし → バブル

(ハ) 不動産価格

今回の不動産価格上昇の要因は何であったのか。

異次元緩和 → 市場に大量のマネー供給、金利低減

東京五輪への期待

(ニ) 不良債権処理のために、不動産価格には、

さらに下落圧力かかる。

(ホ) 歴史 ー 不動産価格の底（10年毎）

2002年 ー 2012年 ー 2022年 ー

4. 2011、10、31 世界の人口

世界の人口は 70億人に達した

年平均 8千万人は増加し、国連の推計では

2050年に 93億人に達し、インドが世界一の
~1億人

人口を持つことになる

日本の人口

1968年 —(40)— 2008年 —(40)— 2048年
年間 年間

98,000千人 ↗ (128,000千人) ↘ 98,000千人

+30,000千人 △30,000千人

↓

40年継続

右肩上りのトレンド 右肩下がりのトレンド

1900年 65才以上 人口の5%

2013年 25%

2025年 30%

2050年 40%

増える世界人口と 減少する日本の人口

2012、11 異次元緩和 と 2013.9 東京オリンピック開催

(原因)

大量のマネー供給

オリンピック開催への期待

(結果)

東京の不動産価格上昇

(30年前 1989年のピーク) バブル

↓

失われた20年

需要の見込まれていないアパート建築

不動産建設ブーム

不動産向け銀行融資の伸び

ブーム

2015年 相続税課税強化

節税対策

貸家建設

東京オフィスビル

↓

需要と供給

アパートの居住者は大きく増えない

(今は悩む) 空室率の上昇

アパートの家賃保証

世帯数の状況

一部の地銀や信金、

将来の賃貸住宅の供給過剰

2010年
日本銀行のETF購入
指数連動型上場投資信託
（リーマンショック後の混乱の安定）

年間 7000億円程度

2016年 黒田総裁時代
年6兆円程度

ETF
(Exchange Traded Funds)

株式市場の活性化
5年より

投資家へ与える安心感

東京証券市場の1日あたり売買額 2兆円
日銀のETF 年6兆円
1回700億円で 年に100回-198回

年金運用法人	36兆円	…日本株保有
日銀	27兆円	…日本第2位
時価総額	654兆円	東証一部

ETF市場売却時の株式市場
（将来における株式暴落リスク）

中央銀行の金融資産比率（GDP比）
アメリカ 20%台
EU 38%台
日本 92%

日本の国債保有者割合

日本銀行	40%
国内銀行	22%
保険会社	21%
年金法人	5%
外国法人	6%
その他	6%

日銀が国債を大量に持つことは
地銀、保険会社の経営に支障
年金基金の資産運用にマイナス
超低金利の継続

微分方程式

2019.12.09
2020.01.06

1、落下の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

空中を落下する物体の運動

t：経過時間　x：落下距離　dx/dt：落下速度

m：重力 ……物体が地球上で地面に引きよせられる力（月と地球で変化）

g：質量 ……質量、物体そのものの重量（月でも地球でも同じ）

$k\frac{dx}{dt}$：空気抵抗の力が速度（$\frac{dx}{dt}$）に比例する、kは比例定数

mg：引力

v：速度　$\frac{dx}{dt} = v$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$ ……落下速度が小さい場合

落下速度　速度 − 空気抵抗

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$ ……落下速度が大きい場合

2、微分方程式の解法　（変数分離形の微分方程式）

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv} \quad \text{—①}$$

tで積分

$$\int m\frac{dv}{dt}dt = mv + C \qquad \int mg^{t} + C$$

第1段　　第2段

$\boxed{\text{微分方程式の解法が必要}}$

微分方程式を解く ……その方程式が成立するような $\boxed{\text{関数の形}}$ を見い出す

①式の両辺をmで割ると

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv}{m} \rightarrow \frac{m}{mg - kv}dv = dt$$

両辺をtで積分すると

$$\int \frac{m}{mg - kv}dv = \int dt$$

?

$$-\frac{m}{k}\log(mg - kv) = t + C \quad \text{—④}$$

$$\therefore \log_e(mg - kv) = -\frac{k}{m}(t + C)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t + C)}$$

$$\therefore v = \frac{1}{k}\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t + c)} \quad \text{—②}$$

vをtの関数として表わすことに成功　②は①の一般解

3. 初期条件

$$v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\} \quad —②$$

②は一般解であり、現象を説明する式としては不完全なので、
cの値を決める必要がある

物体が落下しはじめた瞬間が経過時間のスタートなので

落下しはじめた瞬間

$t=0$, $v=0$ (スタートの初期条件)

$$0 = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}c}\right\} \leftarrow 0+c$$

$$\therefore \quad e^{-\frac{k}{m}c} = mg$$

$$\therefore \quad c = -\frac{m}{k}\log mg \quad —⑤$$

④式に⑤式を代入して

$$-\frac{m}{k}\log(mg-kv) = t - \frac{m}{k}\log mg$$

$$\therefore \quad -\frac{m}{k}\log(mg-kv) + \frac{m}{k}\log mg = t$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad v = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad —⑥$$

5. 肉まんの冷却

蒸したての温かい肉まんは、冷たい空気中に放置しておくと、だんだんと温度が下がって、外気の温度まで冷える。温度の下り方は、肉まんと外気の温度差に比例する

この方程式は

$$-\frac{dT}{dt} = kT$$

t：時間

T：外気との温度差

$$\left(又は\ \frac{dT}{dt} = -kT \right)$$

ある瞬間の温度差 T に比例して、T が減少するので $\frac{dT}{dt}$ にマイナスがついている。

変数分離形の微分方程式として解くと、

$$\int \frac{dT}{T} = -k\int dt$$

$$\therefore \log T = -kt + C \quad \text{——①}$$

これに初期条件を入れて、$t=0$ で $T=T_0$ とすれば

$C = \log T_0$ この式を①に代入して

$$\log T = -kt + \log T_0 \quad \therefore \log\frac{T}{T_0} = -kt$$

$$\therefore \frac{T}{T_0} = e^{-kt} \quad \therefore T = T_0 e^{-kt}$$

7. 減衰曲線

(1) 水中に射し込む光は、だんだんと吸収され明るさは減少する

方程式に書けば　$\dfrac{dB}{dx} = -kB$

B：明るさ　x：水深

$B = B_0 e^{-kx}$　　B_0 は $x=0$ 水面の明るさ

(2) ラジウムなどの放射性物質の自然崩壊

崩壊速度は、残存量に正比例する

$$\frac{dM}{dt} = -kM$$

M：放射性物質の量，t 時間

$$M = M_0 e^{-kt}$$

M_0：$t=0$ のときの放射性物質の量

(3) 池の魚の残っている数

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

N：池の中の魚の数，t 時間

$N = N_0 e^{-kt}$　　N_0：最初の魚の数

減衰曲線で説明される現象は，残量が多いうちは減少が急だったが，残量が少なくなるにつれて減少の度合いが鈍化する。しかしいつまでたってもゼロにはならない

微分方程式

現象の変化を導関数を用いて表わした方程式

現象の変化を次次につなげて行くことによって、
その現象がどのように変わって行くのかを予測する。

次次につなげて行く ⟶ 微分方程式を解く ⟶ $\boxed{\text{積分}}$

時間xにおける 量y の変化率

yは時間xの関数だから $y=f(x)$ $\left(y=\frac{y}{x}\right)$

時間の変化の割合 $\Delta y/\Delta x$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$

これを y' や $\frac{dy}{dx}$ と書き、y の変化率という

この式（変化率）がyに比例するから

$\frac{dy}{dx}=ky$ （kは定数）

分析したい現象 ⟶ $\boxed{\text{導関数で表す}}$ ⟶ $\boxed{\text{微分方程式}}$ ⟶ $\boxed{\text{積分}}$ ⟶ （微分方程式の解） ⟶ （現象の解明）

人間の感覚を測る

鉄棒の重さ、羽の重さ

刺激による反応の変化率は、現在の刺激の量に反比例する　— ウェーバー・フェヒナーの法則

ウェーバー　— 人間の感覚は数量化できる

鉄の棒を持ち上げているときに、ハエがその棒にとまっても、その重さの違いは感じとれないが、　一枚の羽を手にしているときに、ハエがとまるとその重さの違いが感じとれる

— 懐中電灯を、昼間につけても明るさは感じられないが、夜につけるとその明るさが感じられる

xを刺激の量、yを反応の量とすると

反応の変化率　$\frac{dy}{dx}$は、刺激xに反比例するから

$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{x}$が成立つ。

$y = k \log x + C$である

ウェーバー・フェヒナーの法則は、

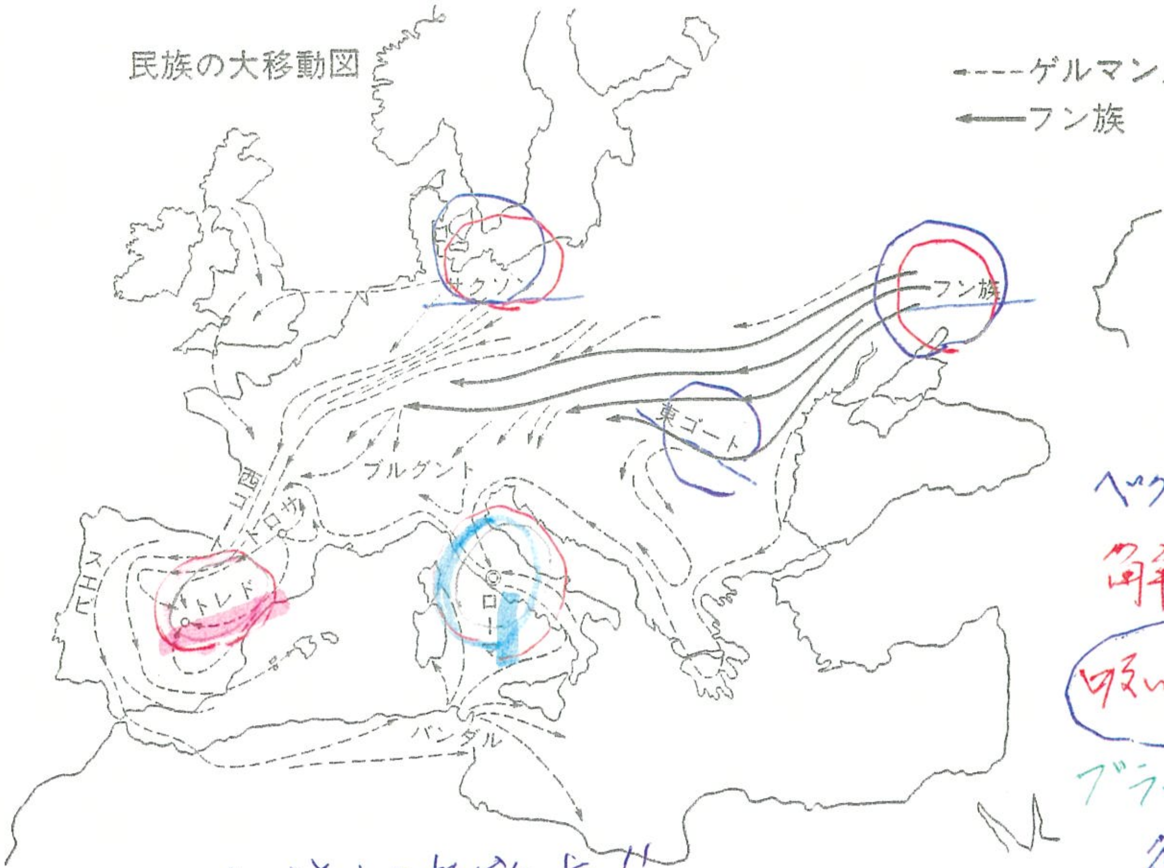
反応の強さは、刺激の強さの対数に比例するとも言える

つまり、人間の感覚は、対数的なのである。

地震の規模、星の明るさなどは人間の感覚によるものなので

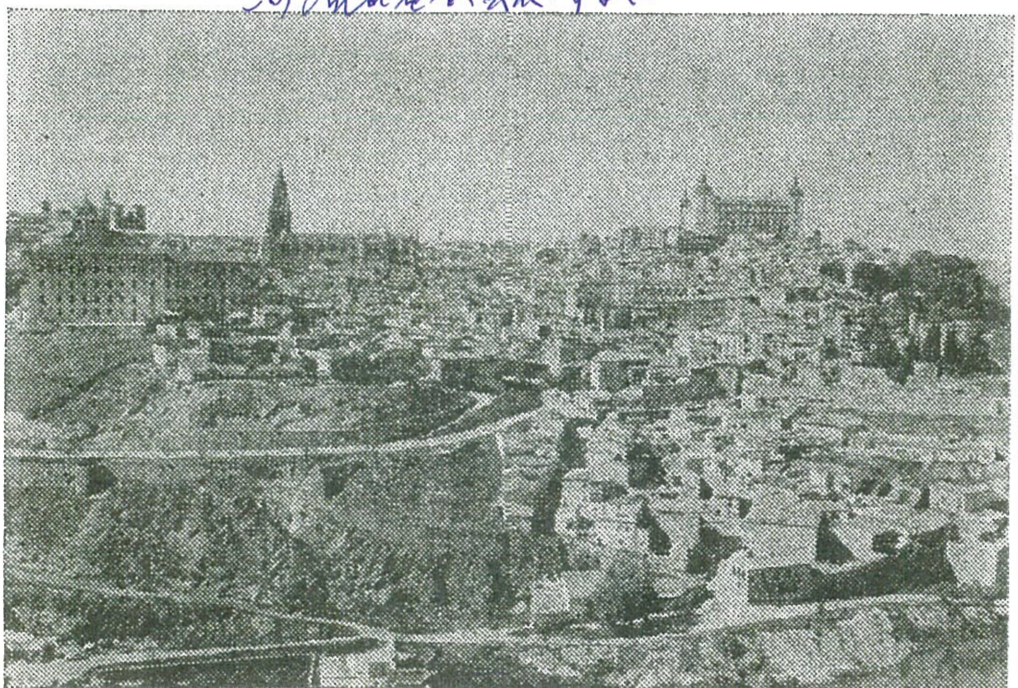
その際に対数が使われる。

★なるほどゼミナール



この流れを数式化する!!

ベクトル場
解曲点
吸い込み点
ブラックホール
微分方程式
民族の大移動の計算
この流れを微分方程式に入れる…!!



●昔の名残を今に留めるトレド

トレド、ローマ

ゲルマン民族大移動

三七五年に始まるとされるゲルマン民族の大移動。これは東のほうからフン族（蒙古系といわれる）が今のハンガリー周辺の東ゴート族の領土に侵入したことから始まりました。現在、ハンガリー人がモンゴル系である理由もそこにあります。

ところで、フン族の大移動はヨーロッパに住んでいたゲルマン民族の諸族に次々に波及し、次ページの図のようにドミノ・ゲームの様相を見せたのです。

これら諸族の移動状態の概要図を見ると、あたかもベクトル場を見ている錯覚に陥ります。すなわち、微分方程式として考えることもできるわけです。

微分方程式は台風の進路の予測にも使われました。人間の支配の及ばない自然現象の解明の一助になっていることがわかったと思います。

そしてゲルマン民族の大移動のように、人間行動についてもさまざまな考察をすることができるのです。たとえばベクトル場を考えるさいに無風地点とか不動点というものを考えましたが、その発展したものに吸い込み点があります。ブラックホールのようなものです。

次ページの図にも吸い込み点が見つかるでしょう。今のマドリードのすぐ南（トレド）とローマの二点です。このことから、いろいろな部族が集結したために「さまざまな文化が集散したのではないか」と推測できます。

事実、刀剣をはじめとした武器製造や、金細工、羊毛工業が活発となったトレドは一一世紀から一六世紀にかけてはスペインの首都として栄えています。もちろん、トレドは紀元前からあった古い街ですが、民族大移動の吸い込み点となり、各地の文化が集中したことも見逃せない事実ではないでしょうか。

対数微分法

$y = x^p$ の微分　　対数で表す

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

(左辺)

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

(x の変化を考えずに
y が変化する関数と
考える
→ y の関数である)

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

↓ y で微分　　↓ x で微分

$(\log y)' = \frac{1}{y}$　　y'

↓ かけ算

$$\boxed{(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}}$$

(右辺)

$p \log x$

↓ x で微分

$$\boxed{(p \log x)' = p \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{x}}$$

$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x}$ より　$y' = \frac{p}{x} \cdot y = \frac{p}{x} \cdot x^p = p x^{p-1}$　　$y = x^p$

↓

$$y' = p x^{p-1}$$

4．変数分離形

空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{mg} - \mathrm{kv}$$

この両辺を m で割ると

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{mg - kv}{m} \longrightarrow \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Mg - kv}}$$

さらに変形すると

$$\frac{m}{mg - kv} dv = dt$$

これは$\underline{f(v)}dv = \underline{\mathrm{g}(t)dt}$の形となっている。

左辺は v だけの関数なので v で積分することができ、右辺は t だけの関数なので t で積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{m}{mg - kv} dv = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k} \log(mg - kv) = t + c$$

$$\therefore \log(mg - kv) = -\frac{k}{m}(t + c)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$$

$$\therefore \mathrm{v} = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$$

となり、v を t の関数として表わせる。
これを微分方程式の一般解という。

複利の計算

ある瞬間の現在高に比例して利息が付加されていく場合の総額を$x(t)$で表わし、

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = ax$$

により$x(t)$の変化を明らかにする。

この式は変数分離形の微分方程式で、x の関数と t の関数を

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = adt$と両辺に分離し、

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \int \quad adt$$

$$\therefore \log x = at + c$$

t=0 のとき、x=A として

$$x = Ae^{at}$$

細菌の増殖、細胞の分裂、複利の元利合計など

積分

2020.01.06

導関数の定義式　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - fx}{h}$

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) \div \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{(x+h)}{x}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで　$\frac{h}{x} = k$ とおくと

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

k が 0 に近づくと　$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の数 e に近づく

$$e = \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.71828\cdots\cdots$$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ となり 底を e にすれば、$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$ となる

放物線、導関数、頂点 ― 接点、接線の式

放物線　$y = f(x) = -x^2 + 3x + 4$　（将来の値）

$-1 \times x^2$　$+3 \times x$

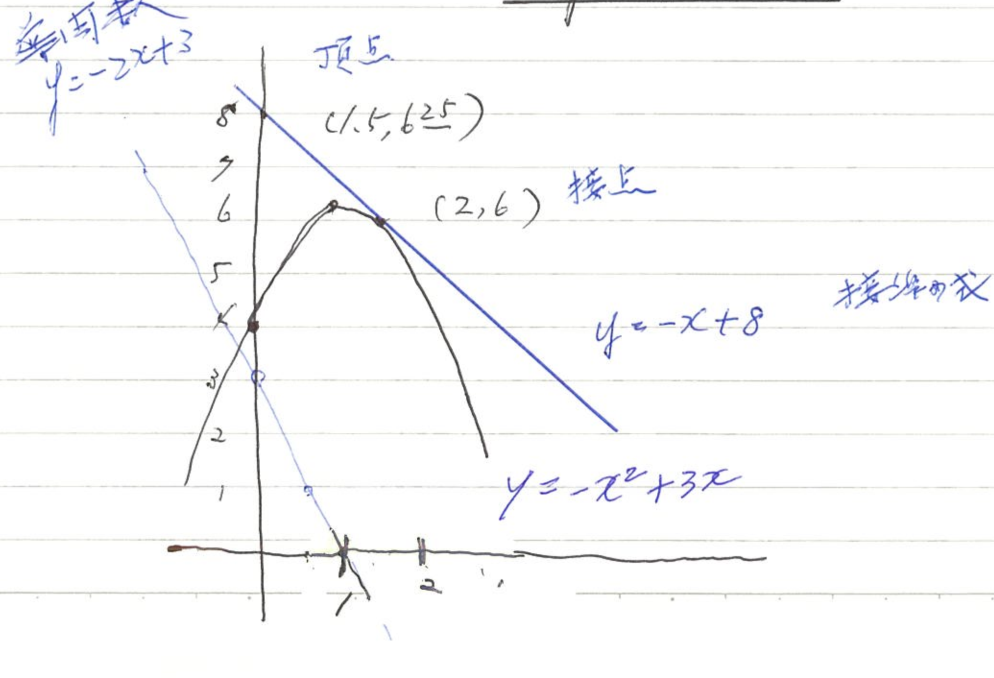
導関数　放物線の変化の仕方を表す
$y' = f'(x) = -2x + 3$　（変化の状況）　動きの

グラフの頂点　傾きがゼロに　関数の値に
$f'(0) = -2x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$　導関数の値がゼロ
$f(1.5) = -1.5^2 + 3 \times 1.5 + 4 \rightarrow y = 6.25$　$(1.5, 6.25)$　元の関数での値

放物線上の点、(2, 6)における
$x = 2$ における
$y = f(2) = -4 + 6 + 4 = 6$　A (2, 6) 点

接線の傾き　点A (2, 6) における接線の傾きは、導関数により（瞬間の変化）
$y' = f'(2) = -4 + 3 = -1$

接線の式　点 (a, b) を通って、傾きが m の場合の線（接線の式）　(2, 6)
$y - b = m(x - a)$　　$y - 6 = -1(x - 2)$
$y = -x + 8$



5. 次元の問題

現象の世界	3次元の空間	空中の竜	現実の姿、形
平面	2次元の空間	影に映った竜	影
曲線	2次元の空間		
直線	1次元の世界	影の部分の直線化	影の分析

微分とは、変化するものを、1つ低い次元に落として表わすものである。
従って一つ低い次元の式となる。

ひょっとしたら、時空の中を動く現象を3次元の空間に映し出し、
空間の中を動く竜の動きを平面に映った影で分析できるかもしれない。

身のまわりのもの	分かりやすい	→ 同じもの
それらを越えたもの	何か得体の知れないもの	

同じものの別の側面が、あるときは親しい身のまわりのものに見え、
あるときは、正体なき大いなる力に感じられたりする。

この何か、全体的なものを操作したり、記述したりできる道具があれば、その一端を捉えることが出来るのではないか。

微分積分というのは、そういう道具になる可能性がある……
身近なものとして現われたものを微分を使って記述できれば、
そのものの正体を知ることができるのではないか。

半円の面積

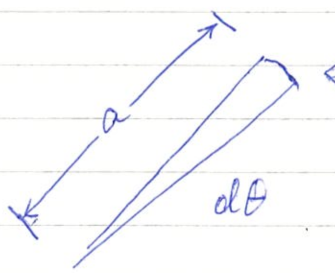
直角座標だと　$x = r\sin t$

極座標だと　$r = a$

（直角座標でx軸に平行な直線のい　$y = a$のようなもの）

扇形の面積

$$\int_0^a (r\,d\theta)\,dr = \left\{\int_0^a r\,dr\right\} d\theta = \frac{1}{2}a^2 \cdot d\theta$$



$\int_0^a (r\,d\theta)\,dr$

円の面積

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\,d\theta = a^2\pi$$

T

No.

Date

4. ドーナツの表面積

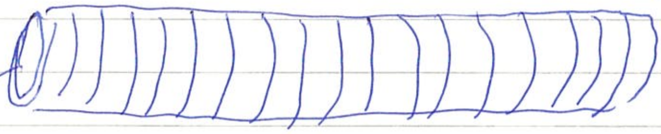
太さは 2cm とする

体積は 15π cm³ とする

① 4等分にしてつなげる

② さらに細かく切ってつなげると ⟶ 円柱になる

⟵ 長さ h 15cm ⟶



$15\,cm \times \pi\,cm^2 = 15\pi\,cm^3$

底面積 $1 \times 1 \times \pi = 1^2 \times \pi = \pi$、円周は $2\pi \times 1$

体積 $\pi h = 15\pi\,cm^3$ より、高さは $h = 15$

円周は 2π

よって、ドーナツの表面積(円柱の側面積)は、

$15 \times 2\pi = 30\pi\,cm^2$

実例練習

1. 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$

$$f(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{16}{3} \qquad g(x)=-2x^2-2x$$

((1)) 2つの関数のグラフを描く

((2)) $x\geqq 0$ の範囲で、$f(x)$、$g(x)$、x軸に囲まれる面積Sを求める。

(解)

(1) $f(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{16}{3}$ を微分して頂点を求める

① $f'(x)=\frac{2\times 4}{3}x=\frac{8}{3}x$、$\frac{8}{3}x=0 \rightarrow x=0$

② $f(0)=-\frac{16}{3}$

よって、$f(x)$ の頂点は、$(0, -\frac{16}{3})$ であり、

$f(x)$ の x^2 の係数はプラスなので、下に凸

(2) $g(x)=-2x^2-2x$ を微分して頂点を求める

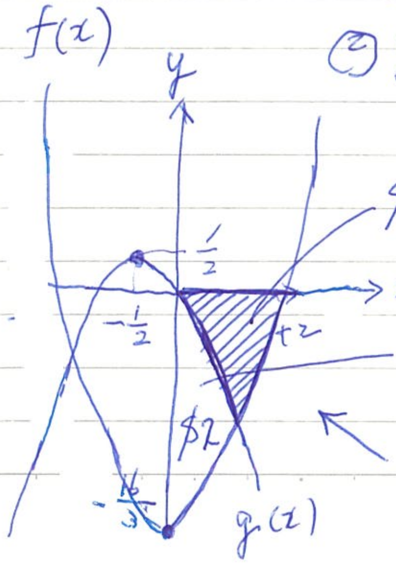
① $g'(x)=-2\times 2x=-4x+2$、$-4x+2=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$

② $g(-\frac{1}{2})=-2(-\frac{1}{2})^2-2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

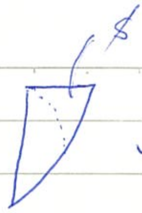
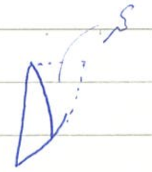
よって、$g(x)$ の頂点は $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$g(x)$ の x^2 の係数はプラスなので、上に凸

また、$g(x)$ は定数がないので、$(0, 0)$ を通る



$x\geqq 0$ で、$f(x)$ と $g(x)$ と x軸に囲まれている

(2) 面積 S は  、S_1 は  、S_2 は 

$$S = S_1 - S_2$$

① S_1 は $f(x)$ の x 軸との交点を求めると

$$0 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3} \iff 0 = x^2 - 4$$

$$\rightarrow 0 = (x-2),\ (x+2)$$

よって、$f(x)$ は $x = \pm 2$ で x 軸と交わる

$$S_1 = \int_0^2 -f(x)\,dx = -\int_0^2 \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}\right)dx$$

$$= -\left[\frac{4}{3\times 3}x^3 - \frac{16}{3}x\right]_0^2 = -\frac{4}{9}\times 2^3 - \frac{16}{3}\times 2 + 0$$

$$= -\frac{32}{9} + \frac{32}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{9}}}$$

② S_2 は、$f(x), g(x)$ の交点を求める

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3} = -2x^2 - 2x \rightarrow 6x^2 + 4x^2 + 6x - 16 = 0$$

$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ より} \right)$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 5\times(-8)}}{2\times 5} = \frac{-3\pm\sqrt{169}}{10} = \frac{-3+13}{10} = -\frac{8}{5}, 1$

グラフより $0 < x < 1$ において $f(x) < g(x)$ なので

$$S_2 = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^1 \left(-2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(-\frac{10}{3}x^2 - 2x + \frac{16}{3}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{10}{9}x^3 - x^2 + \frac{16}{3}x\right]_0^1 = -\frac{10}{9}\times 1^3 - 1^2 + \frac{16}{3}\times 1 - 0 = -\frac{10}{9} - 1 + \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{29}{9}}}$$

$S = S_1 - S_2$ より $S = \frac{64}{9} - \frac{29}{9} = \frac{35}{9}$

7. 微分方程式

(1) ある変化する量があって　$f(x)$

(2) その全体が分かりにくい　動きの先が分かりにくい

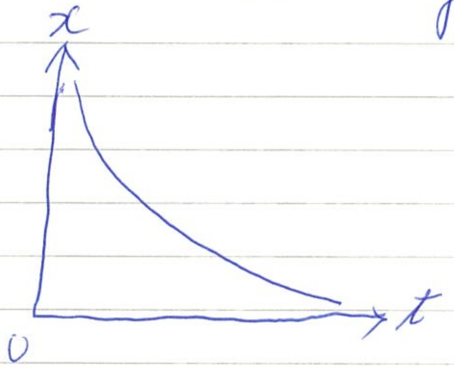
(3) (1)が変化するとき、それを微分方程式で表す

8. タンクの液体が減る速さ

液体の出る速さ（液面の変化の速さ）は、その面の高さ（液体の量の大きさ）に比例する。　変化の速度は○○に比例する

液体の面の高さ x の変化の速さ　$\frac{dx}{dt} = -ax$

y が x に比例するとき、$y=ax$、x は減少するので $-a$



お湯の冷める早さ（x お湯と周囲の温度差）

$$\frac{dx}{dt} = -ax$$

ラジウムの崩壊の早さ（ラジウムの量 x）

$$\frac{dx}{dt} = -ax$$

9. 微分方程式の使い方

(1) 全体の様子はよく分からないけれど….　台風の進行

(2) 今、起きているものの変化の様子はよく分かる。　風の吹いている様子

↓

予測、大変な威力を発揮する　（台風の進路）

自然現象や社会現象が

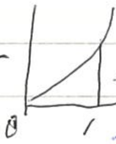
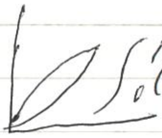
(曲線)

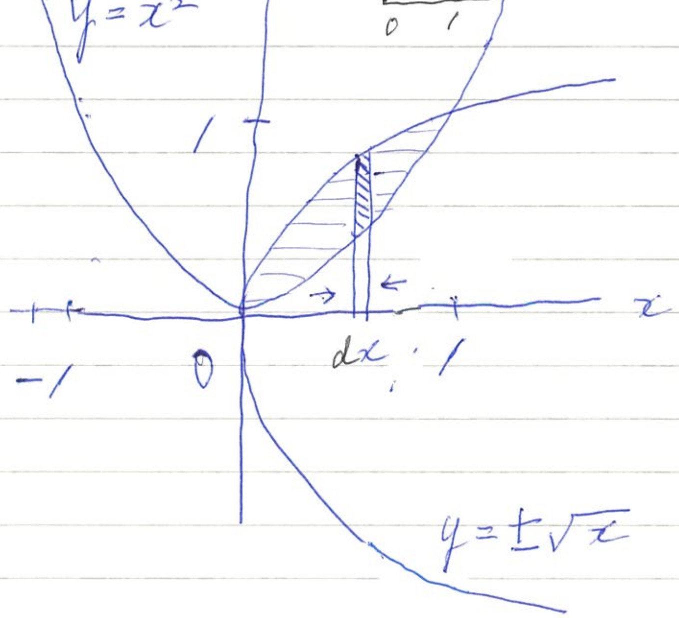
$y=f(x)$ の形で表わされたとすると、

この曲線と x 軸にはさまれた面積を、

x が a から b までの区間について計算すると、

その面積 S は、 $S=\int_a^b f(x)\,dx$ で求められる。

 $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ −  $\int_0^1 x^2\,dx$ =  $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$



左のグラフの場合は

横線の部分は、

$y=x^2$ と $y=\pm\sqrt{x}$

の2本の曲線に囲まれたものである

図形の縦方向の長さは

$\sqrt{x}-x^2$、 （dx は幅）

従って、細長い図形の面積を dS とすると $=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ は

$$dS=(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

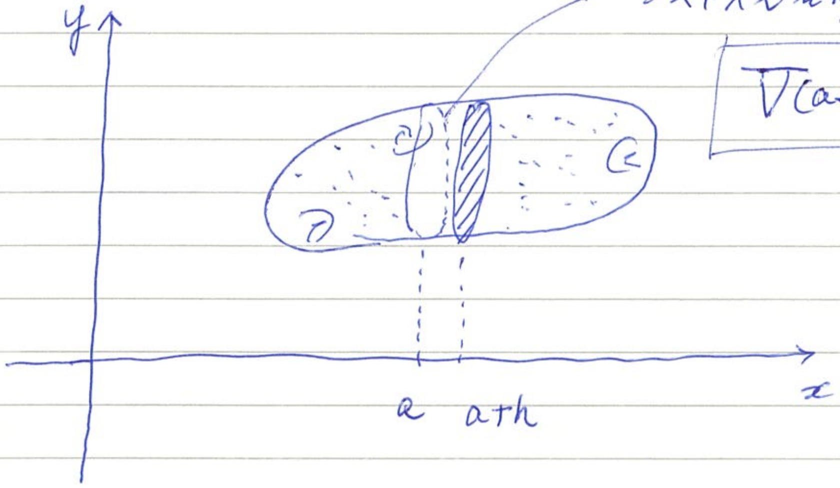
$(1)^{\frac{3}{2}}=1$ $(1)^3=1$

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\int\sqrt{x}=\int x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{1+2}{2}}x^{\frac{1+2}{2}}$

$\int x^2=\frac{1}{2+1}x^{2+1}=\frac{1}{3}x^3$

6. ジャガイモの体積



（ポテトチップ）
ジャガイモをスライスした部分の体積

$$\boxed{V(a+h)-V(a) \fallingdotseq h \times S(a)}$$

$S(a)$＝ジャガイモの断面積

ポテトチップの厚み

hを十分小さくすれば、その体積 V はほぼ $h \times S(a)$ となる。

$V(a+h)-V(a)=h \times S(a)$ となり、

hで両辺を割り、hを限りなく0に近づけると

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(a+h)-V(a)}{h} \fallingdotseq \frac{h \times S(a)}{h} = S(a)$$

↑（（ジャガイモの体積を微分するとジャガイモのスライス（ポテトチップ）の面積になる。））

（（逆に、立体の断面積を積分すれば、その立体の体積が求められる。））

$$V(x)=\int_b^a S(x)\,dx$$

2. 地球の体積

ギリシャの天文学者 エラトステネス (B.C. 278 ~ B.C. 192)

シエネの正午の井戸に反射した太陽 (太陽の影の角度 0°)
同時刻にアレクサンドリアで映った太陽 (太陽の影の角度 ◯°)
] 800キロの距離 7度12分の差

地球の円周の長さを x とすると

$$\frac{7°12'}{360°} = \frac{800\,km}{x}$$

$x \fallingdotseq 40{,}500\ km$　地球の円周

円周 ÷ 2π ≒ 6,370 km　地球の半径　$2\pi r = 40{,}500$　$r \fallingdotseq 6{,}370$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1.08 \times 10^{12}\ km^3$　地球の体積