第8回 会計の歴史

(QR コード・キャッシュレス・ビットコイン)

2019 年 12 月 23 日
会計と経営のブラッシュアップ
2017 年 5 月 8 日
山内公認会計士事務所

本レジュメの参考資料 (企業会計基準)、(激流 2019.4～12 国際商業出版)
(人工知能は人間を超えられるか 松尾豊著 2015.3 中経出版)
(QR コード決済騒動に潜む地殻変動 2019.1.1 池田信太郎 日経ビジネス)
(予測のはなし 大村平著 2010.7 日科技連)(Innovation and Entrepreneurship 1985 Peter F Drucker HAPPER&ROW)
(会計が動かす世界の歴史 ルートポート著 2019.2 KADOKAWA 刊)
(仮想通貨はどうなるか 2018.11 ダイヤモンド社刊 野口悠紀雄著)
(中央銀行が終わる日 2016.3 岩村充著 新潮社刊)
(仮想通貨時代を生き抜くための「お金」の教科書 2019.4.26 小学館刊 白井さゆり著)

業態の変化

ケインズによる幻の基軸通貨「バンコール」／貨幣の本質は譲渡可能な信用

旧業界	新業界
旧　態　機械による効率化	革　新　機械が人間のようになる
後追い	先　頭
人手不足	省力化
品質停滞	品質向上
納期遅延	機会先取
収穫逓減	成　長
過　去	将　来
先送り	先取り
昨　日	明　日
紙媒体	ウェブ　コカコーラのコンテンツ
古いコンテンツ	新しい コンテンツ
老年化	著者の吸収
古い想法	新しい発想
人口減少	人工知能
下り坂、指数関数的	上り坂、指数関数的

→ 乖　離 ←

変化・対応

蓄　積 → 活　用 → 展　望

No.
Date

ブロックチェーンとは何か

ガバナンス	統治
コンセンサス	合意
ディセントラライズ	分散

1、分散型台帳技術

暗号化、鍵

チェーン構造

銀行の台帳システムとの違い、どこかのシステムで一元管理されていない

世界中のコンピュータで取引コピーの持ち合い

2、ユーザーIDとパスワードで確認

しかし、裏で動いている取引管理のシステムは別

3、ブロックチェーンの信頼性

取引情報の改ざんは、世界中のコンピュータの改ざんが必要

4、金融、行政、医療など多分野への応用が期待できる

5、経済とは「モノ」や「サービス」の交換システム

モノとカネの交換経済 ― 実物経済

モノを介さずカネだけの 〃 ― 金融経済

6 価格とは、売買双方の相対的な価値判断

オランダのチューリップのようなもの。 価値ではない。

通貨も交換価値が一定のものではない

7、金庫の保管業務から生まれた通貨

→信用創造

会計の歴史

2019.8.2

歴史

物的表現(価値)	源泉
お金	自分、人…—
価格なのか、価値なのか	
等価物?	
尺度なのか—(単なる)	
未収金	
人名 a/c	借入…
	未払金
土地	⋮
建物	
⋮	

脳の仕組と複式簿記

ヒトの脳が持つ貸し借りを把握する能力

他人に
期待したり、頼りすぎないこと　むしろ感謝の気持

(1) 仮想通貨は極めて投機性の高い金融商品

クズ〜金貨　　、但し不換紙幣ではない

(2) お金の持つ3つの機能（仮想通貨成功の条件）

① 交換の手段

② 価値の尺度

③ 価値の保存

民間の通貨　―　銀行の貸出、与信

国債　―　政府の負債

(3) お金の本質

譲渡可能な信用

(4) 人間の貸し借りを把握能力がお金を流通させる

(5) 本位貨幣は、一般的にデフレになりやすい性質を持つ

金本位　――　採掘の速さに限界がある、供給が追いつかない

暗号通貨　―　〃

ビットコインの暴騰は強烈なデフレだったと言える

ビットコイン換算であらゆるモノの価格が下がった

(6) ビットコインは需要にあわせて流通量を調整できない

(7) ビットコインが既存の通貨の代わりになれば — 需要に合わせた流通の調節

(8) ビットコインのピークは、2017.12 以降、下落に転じ、2018.6にはピークの$\frac{1}{3}$に、

価格高騰 — 投機バブル

(9) ビットコインは、データの大量処理を可能にする仕様になっていない

(10) 新しいタイプのブロックチェーンとは

中国の最先端AIが作り出す未来

(11)

貸し借りという脳の仕組

貸した人（借りた人）の名前を記す

イタリアの商人

誰に貸しがあり、誰に借りがあるのか

↓

猿から人間への進歩 → 帳簿を作る

メソポタミアのトークン

数の勘定

@ 日本の高度成長

@ ビットコイン

お金の本質は 譲渡可能な ~~[illegible]~~ 信用

@技術革新と仕事 94p

誰もが使えるようになった技術

No.
Date

QRコード決済

1、QRコードの決済の手順等 (顧客のスマホの利用)

施設

施設の顧客化

QRコード決済	電子マネー決済	備考
(1) 対象商品、サービスを顧客が選定する (商品、サービス現物チェック、店員説明	同じ	
(2) 決済 顧客は自分のスマホで		店のレジ機器が不要
① 店頭のQRコードを読み	① レジで請求額を読み	
② 金額を自分で入力する	②～③	②が必要 電子マネー決済は ①の時点で店が 行っている。
③ 店員が金額を確認し、決済	スマホや電子マネーで 暗証No等を入力して、決済	

2、スーパーが誕生したとき (セルフサービスの実施)

選択、運搬の顧客化

従前	スーパー誕生後	
顧客が商品を選択するために 店員が、相談・援助を行う 価格の交渉を行う	顧客が商品を選択	店員の縮減 交渉の不在
店員が商品をレジまで運ぶ	顧客が商品をレジまで運ぶ	店員の縮減
店員が商品を顧客の自宅へ届ける	顧客が商品を自宅へ持ち帰る	〃

PLUS

I、お金の歴史

1、世界最古の硬貨　エレクトロン貨

あらかじめ純度と重量を定める

BC650年頃　エーゲ海のイオニア（トル

金と銀の合金

ライオンなどの動物

2、お金の始まり

(1) 物々交換からの脱却

お互の欲しいモノやサービスによる交換の成立

不便さの解消

共通の価値の尺度　11000〜8000年前

最初は、家畜、穀物、毛皮、貝殻、布…

…商品貨幣（コモディティ・マネー）

(2) 金属貨幣へ　一人類の経済史の最大のイノベーション一

古代メソポタミア　紀元前3000年頃

農業の発展　一他地域との交易

当時の交換手段 一 大麦、羊毛、油、金属、子安貝

商取引を記録した楔形文字の粘土板

春秋・戦国　…クワやスキの形をした青銅貨

秦　…使い勝手のよい丸形でまん中に四角の穴の貨幣の形

(3) アレクサンダー大王の偉業

マケドニアのフィリッポス2世の後継者

アレキサンダー大王（3世、BC 336～323　14年間在位）

若干20歳で即位

BC 330年　アケメネス朝ペルシアを滅ぼす

征服地にギリシア人、マケドニア人を定住させるための都市アレキサンドリア

帝国内の交易の振興のアッティカマネー（通貨）の鋳造（アテネ）と使用

アレキサンダーコイン（金貨）

テトラドラクマ（銀貨）（トラキア）

(11) シニョレッジ（通貨発行益）

幕府は、金銀銅本位制の下、「貨幣の改鋳」によって収益（シニョレッジ）を得ることができた。

各地の大名は、藩札を発行したり、大商人から借入れを行ない財政の維持に努めていた。

(12) 幕府の貨幣制度

金座	日本橋本石町 外	幕府の通貨発行権の3分化 三貨制度
銀座	伏見	
銭座	寛永通宝	

(13) 藩札の流通

1

6 仮想通貨時代を生き抜くための

お金の教科書

慶応義塾大学教授
白井さゆり

2019.10.23
2019.10.28
2019.11.04
2019.12.09
2019.12.23

お金の本質とは何か
世界最大の債務国の日本人としてお金の本質を考える必要がある

1、2017.12 ビットコインの価格が 1ビットコイン 約2,300,000円
の高値をつけた。

同年1月1日の価格はざっと115,000円だったので 1年で
20倍にふくれあがった

しかし 2018.12 360,000円 に下落

2、仮想通貨の優位性

(1) ブロックチェーンと呼ばれる非中央集権的な仕組み
（管理者不在の仕組）

(2) 暗号化技術を用いて取引を行うデジタル通貨

(3) 金融を大きく変えてゆく可能性

(4) 現代は、「仮想通貨時代へ突入した」と言える

(5) 本質と可能性をしっかりと理解した上で
これとうまく付き合っていく道を探る必要がある

3. 人々の信用や信頼に基づいた現代の通貨制度

不換紙幣（フィアットマネー）

4. 将来の「お金」にまつわる不安

お金の本質の理解

世界最大の債務国 日本として

(4) 世界最古の紙幣「交子」中国「宋」

唐（618~907）の金属貨幣

宋（960-1279）　銅貨　交子（紙幣）四川省

銅の不足 → 鉄貨（重くて不便 → 紙幣の発行）

交子（紙幣）には、硬貨や塩を担保として価値の保証

一 兌換紙幣

不換紙幣は金属との交換が保証されていない

「信用」「信頼」に基づくフィアットマネー

「交子」は、西夏との戦費をまかなうため世界最初の法貨となる

次第に兌換停止の「不換紙幣」へと変容

元（1271-1368）、明（1368-1644）時代

政府が発行する紙幣が唯一の法定通貨（不換紙幣）

(5) スウェーデンでは

17C 世界初の銀行券の発行（兌換紙幣）

(6) 金本位制の確立　　1816年 イギリス

近代ヨーロッパ

本位貨幣　金貨の発行

自国通貨 ― 単位の価値が、その貨幣に含まれる

一定量の金や銀と結びつく貨幣のこと「正貨」

(10) 米を介在させた日本独得の通貨制度

並列（米本位制（税物）
　　　金銀銅本位制

ユニークなもの

年貢米 → マネー（通貨）換金 → 人件費その他の支出

→ 藩の赤字経済 ― 大商人からの借入れ ―

江戸経済　米価 ―― 一定

江戸のモノ、サービスの騰貴 ― 価格上昇

↓ 換金しやすい商品（作物）生産

↓ 藩財政の圧迫

江戸 ― 各地からの輸入　江戸の消費

大阪 ― 各地から物資が集まり → 江戸へ輸出

札差 ―― 税物（米）を給される旗本や御家人から
米を買上げて換金する

「貨幣の改鋳」はなぜ行われたか？

の章を読んで「異次元の緩和」の意味が少し分かりました。

日本では

江戸時代、金銀銅の豊富な金属資源を背景に
1600年代までは、一般物価の価格が上昇する
（つまり通貨価値が低下する）「インフレ」状態が続いていた。

ところが、それ以降は、金銀の産出量が伸び悩み
「マネー（通貨）」の供給量の伸びが鈍化してゆく。
1680年度になると貨幣不足は深刻となり、
「マネー（通貨）」の価値は上がり、逆に物価は下落してゆく。
「マネー（通貨）」が不足すると、大都市江戸では全国各地のモノの
買入れ（輸入）に対する支払いが難しくなり、江戸の経済活動は
停滞してデフレが続きました。

こうした事態を切り抜けるために幕府が行ったのが「改鋳」だった。
金の含有量を減らし、貨幣発行量を増やしてインフレを起こそうとした。

江戸時代の貨幣の改鋳は、「マネー（通貨）」の供給量を増やすための、「金融緩和政策」だったと言えます。これによって経済を活性化させようとしたのです。

江戸時代における貨幣の改鋳（印象とは違うものがある）

綱吉時代の元禄8年（1695）「元禄の改鋳」

勘定奉行吟味役 荻原重秀が主導

貨幣の流通量は、最大～8割ほど増えもデフレ圧力は和らぐ

↓

荻原のその後、宝永通宝、永字銀などの改鋳、新貨発行は、莫大な出目（改鋳益）を稼ぐとともに、貨幣の供給が需要を超え、貨幣の過剰供給を招き、ついにインフレを発生させてしまう。 1772 失脚

荻原の後を継いだ新井白石は、方針を転換し、通貨の金銀含有量を元に戻す。しかし、これによって貨幣供給量は減少し、深刻なデフレを招く。

このデフレの解決は、吉宗による「元文の改鋳」であった。

天保の水野忠邦の改革は失敗し幕府の財政再建は失敗する

黒船来航後は防衛に多額の費用がかかってきます

この時期、幕府は「御用金」で財政不足を補おうとするが、反発が大きく幕府の威光も低下する中、新政府が樹立される

(15) 中毒的な魅力を持つ貨幣改鋳

最初の改鋳 1回目 元禄8年 1695年「元禄の改鋳」

柳沢吉保、荻原重秀

金含有率 84% → 57%

(慶長小判) (元禄小判)

↓

荻原は独断で　　　　経済活動が活発化

宝永通宝、永字銀、三ツ宝銀、元禄文化

四ツ宝銀、乾字金 などを発行

その結果 貨幣量 > 物 となりついにインフレを発生させる

宝永の大地震、富士山噴火 … 物価の高騰に拍車がかかる

荻原は、政敵である新井白石に非難され失脚

新井白石は、金銀の含有量を元に戻す

これのことにより、貨幣供給量は極度に減少し、深刻な

デフレを引き起こす

このデフレを解消したのが 吉宗による元文の改鋳

低インフレと高成長の実現

天保の改革の失敗と幕府財政の破綻

水野忠邦の行った倹約令や年貢の増収

需要が極端に抑制され デフレとなる

5、キャッシュレス決済

(1) 現金にこだわる日本人

① 低金利 ―― 預金のメリットなし.

② 税金のがれ

③ 高齢化

(2) 消費増税と増税時のポイント還元

① 2014.4 5→8%へ増税 後の落ち込み

② キャッシュレス化の促進

お金を循環させ、経済の活性化、効率化

(3) キャッシュレス

① プリペイド（交通系、流通系） Tマネー

② リアルタイムペイ（デビットカード、モバイルウォレット） PayPay

③ クレジットカード（ポストペイ） DCカード

(4) スウィッシュ（スウェーデン 2012年から運用）

相手の電話番号を入れて、送金指示をするだけ

手数料はかからない

人口の60%が利用

(5) 中国

ウォレット ◎

銀行口座
クレジットカード

(電子商取引)

キャッシュレス決済

◎ アリペイなどの決済機関

(1) 購入者が商品を受取るまでの間
支払額を預る

(2) 売り手は、決済~~機~~機関が代金を確保
しているので安心

(3) ウォレットでの入出金、送金も可能

◎ QRコードの読み取りによる代金決済

端末不要

金融のデジタル化による経済構造の変貌

都市部を中心に経済の効率性を高め，消費を喚起して
質の高い経済成長を実現するための道筋をつけた。

5、生き残りに欠かせない姿勢

(1) 円の暴落はまだできるか

異次元緩和　① 金利の低下

② 政府の財政規律の弛緩

半分は日銀買占め

そのため国債の需給逼迫に

危険

③ ETFの買入れ

株価へ上昇

↓

今後は？

(2) 有望な優良資産の確保、不安

(3) 不動産投資は

2020　オリンピック　↓

2025　大阪万博　↑

少子高齢化　↓

(4) 仕事が無くなって行く時代

(5) AI

今度こそ人間の仕事がなくなるのではないか。

(6) 格差の時代

治者の先憂後楽

(識者の狼少年)

（11 月のごあいさつ）
2019 年 11 月 1 日（金）

現在、**日本の政府債務は GDP 比で 250％**にも達し、主要国で最大となっている。社会保障費は増え続け、財政赤字と政府債務の拡大は、**将来世代への負担の先送り**であり、できるだけ**財政再建を急ぐべき**である。

現在、**白井さゆり先生著の「お金の教科書」**を読んでいるが、その中で、江戸時代という**「閉ざされた経済」の中での通貨制度と幕府の財政政策**を見ると、幕府は、**貨幣の改鋳**という**「金融緩和政策」**を取り、「元禄の繁栄」など成功することもあったが、結局は、**中毒的な改鋳**と**大商人等からの借入れ等**により、黒船来航対策費増もあり、**幕府の財政再建は失敗**し、**明治政府へと移行**する。

今、**改めて幕末の経済状況を見て**、財政破綻に瀕した日本の財政を考えると、**安易とも言える議論** (FTPL や MMT) が語られている**現状に不安**を覚える。

その一つは FTPL (**物価水準の財政理論**) である。もし、その国の国債の債権者のほとんどが、その国の者であるならば、**財政赤字を一種の規律をもって無視**し続けたなら、物価は緩やかに上昇し、それが常態化することで**財政赤字は実質目減り**する。これは**国債償還による財政再建よりはるかに効率的**である、とする。(FTPL **プリンストン大学　シムズ教授**)

これは、**将来に向かって財政再建を放棄する**ことによって、**現在のインフレ率を高める**ことが目的とされているが、これに、我が意を得たりと賛意を表す日本の学者もおり、**国を憂える議論**はないのかと心配である。

他の一つは、MMT **理論**である。自国通貨を持つ政府は、**財政的な予算制約に直面することはない**(国債をいくらでも発行できるし、それによって破綻することはない)という考えである。すべての経済及び政府は、生産と需要について、物あるいは環境的な限界があるが、**急激なインフレにならない限りは、その限界を露呈することはない。巨額の財政赤字**があっても、**インフレも金利上昇も起こっていない日本**は MMT **の成功例**であるとする意見もある。(MMT の主唱者の一人　**ステファニー・ケルトン教授**)

これは、

財政再建の失敗は、**亡国への道**である~~ということは~~、江戸時代の教訓であった~~る~~。**先憂後楽は、治者の要諦**である。国難を座視して、**これでいいのであろうか。狼少年と言われても世に警報を打ち鳴らすのが識者の役目ではなかろうか。**

キャッシュレス化の進展
(非接触社会の入口)

（6 月のごあいさつ）
2019 年 6 月 1 日（土）

キャッシュレス化が進展している。ビットコインは、現実の支払、受取、保管の自在性と迅速性と安全性とコスト等の点に電子マネーと同等以上の**利便性**が認められれば、電子マネーにはない財産価値も生じ、**飛躍する可能性**もある。しかし、現状では、行止まりが見えたようだ。ビットコインよりも、その核心的な技術である**ブロックチェーン**を金融、流通、契約等の分野に応用できれば、単なるキャッシュレス化を超えた安全性、経済性、簡便性のある**業務の自動化、効率化**が可能となる。それは、**業務のキャッシュレス化**であるように思える。

すべての「モノ」は、インターネットにつながり、これによって生じるさまざまな産業構造の変化、「**第四次産業革命**」が進行中であると言われている。
人間が指示を出さずともコンピューターが自分で判断して最適な行動をとるかのような例は、VR や会計ソフトの仕訳などの学習機能にも感じられる。進みつつある**人口減少社会における、省人化の流れ**が背を押し、世界で 6 億人というネット人口の急増とスマホの普及などのあらゆる場面に**デジタル化の波**が押し寄せ、キャッシュレス化と省人化が勢いを増している。経済や社会は**大きな変革期**を迎えようとしているようである。時代は、**ポストプライバシーの時代**に入っているという考え方もある。データを共有することは、税金を払うようなものであり、サービスを使うためには、データを提供することもやむを得ないという時代である。

日本は**キャッシュレス化の後進国**だという。キャッシュレス化とは、中国のアリペイなどにみられるように、決済の低価格性、迅速化と簡素化である。電子マネーで電子決済をする場合のコスト、迅速性、簡易性の点で日本は、克服すべきハードルが高い。この**後進性のハードル**とは**省人化**であり、生産性の向上である。流通業や飲食業の現状を見ると、無人化に近い**革新的な省人化**による労働生産性の向上が出来なければ、とても世界との競争には勝てないと思う。

日本でもキャッシュレス化は、進みつつある。政府も、「**キャッシュレス・ビジョン**」を策定し、官民一体となってキャッシュレス決済の普及を推進していく方針を発表している。**現状のネックは、サービスの乱立である。**しかもチャージするものと銀行引落しのもの、一回で使える金額もバラバラで仕組みが複雑すぎる。しかし、深刻化する一方の人手不足、レジ業務の軽減などの解決のためにはキャッシュレス化を推進せざるを得ない。
キャッシュレス化は、**顧客の感覚の問題**を解決し、業者の**業務の本格的な転換**となる機会になるだろう。

山内公認会計士事務所

差出人: 山内公認会計士事務所 <yamauchi@3-cpa.com>
送信日時: 2019年10月29日火曜日 9:56
宛先: 白井 さゆり 様
件名: 読書感想文

白井 さゆり 先生

財政再建の失敗は、亡国への道であるということは、江戸の教訓である。
治者は先憂後楽を忘れ、識者は狼少年たらんとすることを忘れている。
日本はこれでいいのでしょうか。

中毒的な改鋳と大商人等からの借入れにより、黒船来航対策費増もあり、幕府の財政再建は失敗し、明治政府へと移行する。
今、改めて幕末の経済状況を見て、財政破綻に瀕した日本の財政を考えると、安易とも言える議論(FTPL や MMT)が語られている現状に不安を覚える。

財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、物価は緩やかに上昇し、それが常態化することで財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的である、とする。(FTPL プリンストン大学 シムズ教授)

急激なインフレにならない限りは、その限界を露呈することはない。巨額の財政赤字があっても、インフレも金利上昇も起こっていない日本は MMT の成功例であるとする意見もある。(MMT の主唱者の一人 ステファニー・ケルトン教授)

1944 年アメリカを中心とした 45 ヶ国は、ブレトンウッズで、ドルの価値を金の一定量に合わせて安定させることを決定(1 オンス=35 ドル)し、その他の国々は、自国通貨をドルにリンクさせることになった。(「金ドル本位制」)
この新体制は、ドルを基軸にする新たな国際通貨体制であった。
ニクソンショックでアメリカがドル金本位制を放棄した後は、「不換紙幣」を中心とする通貨制度時代に入っている。
不換紙幣を中央銀行が際限なく発行するとハイパーインフレなど大インフレを起こす恐れがある。
中央銀行は、フィアットマネーの時代、「物価安定」を実現し、人々が安心して自国の通貨を使って買い物ができるような状況を維持することが至上命題となる。
この役割を果たすためには、景気拡大の局面では、景気が過熱して大インフレを招かないように金融の引き締めを実施し、逆に景気後退の局面では、金利を下げて景気を浮揚させる金融緩和策を導入し、政府の際限のない裁量から独立し、物価安定を図るという大切な使命を忘れてはならない。

山内公認会計士事務所
山内 眞樹　Masaki Yamauchi

Phone:098-868-6895, Fax:098-863-1495
E-Mail:yamauchi@3-cpa.com

2019.08.26
2019.08.05
2019.06.24
2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

積　分　の　定　石

（変化する量を集めて形にする）

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。（微分と積分なるほどゼミナール　S58.1 岡部恒治著　日本実業出版社刊）
（微積分のはなし　1985.3 大村平著　日科技連刊）（Excel で学ぶ微分積分　H24.8 山本将史著オーム社）
（イラスト図解微分・積分　2009.6 深川和久著　日東書院刊）（微積分を知らずに経営を語るな　PHP選書）
（Excel でやさしく学ぶ微分積分　室　淳子著 2006 東京図書）
内山力著

2019.10.07
2019.10.14
2019.10.28
2019.11.11
2019.12.09
2019.12.23

Ⅰ　身近な積分

1．積分の歴史

⑴ 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。（どうやって全体の面積を把握するか）

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

現象を表現し — その細かい変化を把握し — 全体結果を

$y=f(x)$　　$y'=f'(x)$　　$S=\int_a^b f(x)dx$

表現（現象）　　微分（変化）　　積分（結果）

社会科学
自然科学 } ⟶ グラフに描く ⟶ 機何学の問題になる

（現象）—（変化）—（結果）

積分→結果どうなったか、小さな変化をどのように形とするか
　　小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ね
　　るとどうなったかとその結果
　　曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
　　小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
　　変化する様子、変化する量をどうやって集めるか
∫ →インテグラルが付くと積分することを表す（　〃　）

S（SUM）のこと、離散は Σ　　それに小さいものを

変化する量はどんなになるのか

∫小さいものを集める!!

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、
建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

積分

変化の様子、傾向
変化の傾向

導関数とは、　変化の仕方を表わす関数が、
もとの関数の導関数である。

傾向、様子

関数（将来の状況）
導関数は、連続的変化に対する変化の仕方を表す。

連続量の変化を調べるときに使う

ある工場で、x秒間に生産される生産量yが、$\boxed{y=x^2}$、
$y=f(x)=x^2$と表わせるとき、x秒後の生産されている
速さを求めるには、hを無限小として　xから$(x+h)$までの
速さを求める

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

瞬間の速さ
（接線）

hをどんどん0に近くすれば、平均速度$(2x+h)$は、
いくらでも$2x$に近くなる。これがx秒後の速さである

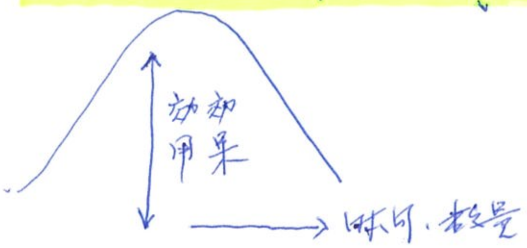
$y'=2x$

x秒間に生産される生産量$y=f(x)=x^2$に対して、
y'に$2x$を対応させる関数$y'=f'(x)=2x$は、
生産される速さを表わす新しい関数である。

動き

$y'=f'(x)$を、もとの関数から得られた関数という意味で
「導関数」という。

サービス（一定期間）とは



(5) インテグラル（integral）

y=f (x) をｘで積分するときに、

∫ f (x) dx と書く（後に来る微分したものをたし算する）

∫ インテグラル　S字型をしているのは合計 (SUM、integral) を表わす

f(x)というタテの長さと限りなく小さなヨコのかけ算

つまり、f (x) dx と限りなく小さなもの（タテ×ヨコ）をかけ算したものを、

∫ そのｘを分割した数だけ足し合わせる記号である。

∫ は後に来る小さなもの（微分）をたし算すること。

物の価値

効用×時間？

ｘとｙの関係

ｙは、かけ算をして全体量が求められるものになる

ｙ＝面　積＝縦×横
ｙ＝体　積≒断面積×高さ
ｙ＝距　離＝速度×時間
ｙ＝売上高＝単価×数量
ｙ＝利　息＝元金×利率
ｙ＝仕入高＝単価×数量
ｙ＝サービス＝○×時間、数量

効用

どちらかというと 動かない 性質

どちらかというと 動く量

サービスは２つのものから成りたっている

○は金のようなもの、火かげん 火力、経験……（サービスの金）

仕事と似ている…… 面積で表わす

タテの長さ（効用、効果）

ヨコの長さ（時間、数量）

$\int_1^2$ インテグラル

∫ (2) − ∫ (1) と書くのはめんどうなので、インテグラルの上と下に２と１が付いているのは、１∫ (x) を求めて、２を代入したものから１を代入したものを引くということにする。

時間のつみ重ね!!

桜はいつ開花するか

桜の花のもとである花芽は前年の夏にできてから眠りにつき、それに、冬から春先の気温とともに成長を続け、　積分

∴　基準値の温度を足していった"積算温度"が一定の値を超えると桜は開花する

↓ 花になる

(定積分の定義)

関数 $y=f(x)$ の不定積分を $\int f(x)dx = F(x)+C$ とし、

a, b を $f(x)$ の定義域の任意の値とするとき、

点 b での不定積分の値と、点 a での不定積分の値との差は

$$\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となり、C の値に関係なく、a, b の値だけで決まる。

この $F(b)-F(a)$ を、

$\int_a^b f(x)dx$ または $\Big[F(x)\Big]_a^b$ と書く。

これを、関数 $f(x)$ の定積分といい、

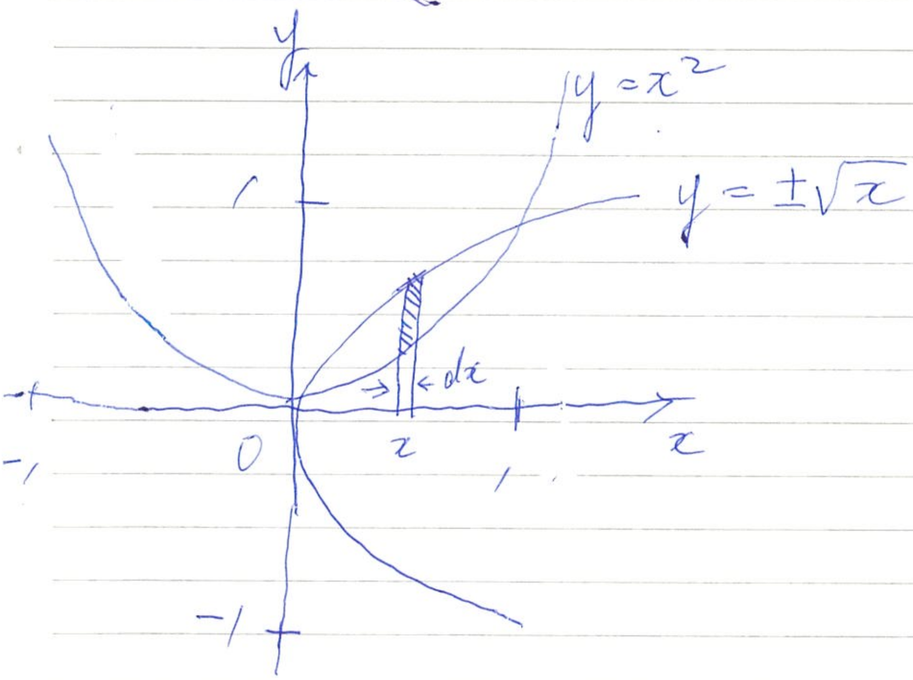
a を下端、b を上端という

この定積分を求めることを、関数 $f(x)$ を a から b まで積分するという

(1) 自然現象
社会現象 の表現 $y = f(x)$ (等式)

(2) 〃 の変化 $y' = f'(x)$ (微分)

(3) $f(x)$とx軸に
はさまれた面積 変化の結果 $S = \int_a^b f(x)\,dx$ (積分)
自然現象の結果、差



高さ

図形の縦方向の長さ

$y = \pm\sqrt{x}$

$y = x^2$

$\sqrt{x} - x^2$

横幅 dx

面積 $dS = (\sqrt{x} - x^2)\,dx$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

導関数の定義式　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$8 = 2^3$　$x = a^y$　$y = \log_a x$　$(\log x)$

$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) \div \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{(x+h)}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで $\frac{h}{x} = k$ とおくと

$$\lim_{h \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$= \frac{1}{x} \log_a e$ は、底をeにすると、

$= \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$ となる

故に

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}$$

減衰量の計算

段階状の減衰量

「ある期間」後に α の減衰が生じる

$$y = 1 - \alpha \quad —①$$

減衰後の残量

連続状の減衰量

減衰率 a

「ある期間」を k 等分し、それぞれに

a/k の率で 減衰してゆくと考えると

ある期間後の残量は、

$$\left(1 - \frac{a}{k}\right)^k$$

α と a の関係は、

a は減衰率

$$1 - \alpha = \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k$$

また、k をどんどん大きくした極限は、

$$\lim \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k = e^{-a}$$

従って、α と a の関係は、

$$y = 1 - \alpha = e^{-a}$$

この関係を、x 期間後の減衰量の式①に代入すると、

$$y = A\left(e^{-a}\right)^x$$

放射線物質、水温のように連続的に減衰する場合の式は、

$$= Ae^{-ax}$$

x 期間後の量を表わす関数の形となる。

y: x 期間後の状態

A: スタート時の量

e: 指数関数 the exponential function

a: 減衰率

x: 期間　　t(分)とすると　$= Ae^{-at}$

下 26

5. 計算例

作成日 . .
作成者

x^{-2}

(1) $y = 10x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x^2}$ を積分する

$$\int y\,dx = \int \left(10x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{10}{4+1}x^{4+1} - \frac{2}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= 2x^5 - \frac{2}{3}x^3 - x^{-1} + C = 2x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C$$

$1+\frac{1}{2}$

$-x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$

(2) $y = 2x^3 + x - \sqrt{x}$ を積分する

$$\int (2x^3 + x - \sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

(3) $y = x^4 + 3x^2 - 10x$ を1から2の範囲で積分する

$$\int_1^2 (x^4 + 3x^2 - 10x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - \frac{10}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{5}(2)^5 + (2)^3 - 10(2) - \left(\frac{1}{5}(1)^5 + (1)^3 - 10\right) = \frac{16}{5}$$

(4) $y = 2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$ を1から2の範囲で積分する

$$\int_1^2 \left(2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$

$$= (8 - 8 - 6\sqrt{2}) - \left(\frac{1}{2} - 1 - 6\right) = \frac{13}{2} - 6\sqrt{2}$$

(5) 関数 $f(x)$ の式とグラフを求める

$f(x)$ は $(1, -2)$ を通り、$f'(x) = 4x - 8$ となるとする。

関数 $f'(x)$ を積分すると

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (4x - 8)\,dx$$

$$= \frac{4}{2}x^2 - 8x + C = 2x^2 - 8x + C$$

C を求める

$f(x)$ は $(1, -2)$ を通るので

$$f(1) = 2 \times 1^2 - 8 \times 1 + C = -2$$

$$\longrightarrow 2 - 8 + C = -2 \longrightarrow C = 4$$

よって、$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

$f(x)$ の頂点を求めると、

$$f'(x) = 4x - 8 = 0 \longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = -4$$

よって、$f(x)$ の頂点は $(2, 4)$。また x^2 の係数はプラスなので下に凸のグラフとなる

(6) (5) において $f(x)$ と x 軸に囲まれた面積を求める

$f(x)$ と x 軸の交点は、$0 = 2x^2 - 8x + 4 \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ より $x = \frac{-1 \times (-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

面積を求めると、グラフより、$2 - \sqrt{2} \leqq x \leqq 2 + \sqrt{2}$ において $f(x) \leqq 0$ なので、

$$\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} -f(x)\,dx = \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} -(2x^2 - 8x + 4)\,dx = -2 \times \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} ((x-2) - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})\,dx$$

$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ より $-2\left(\frac{1}{6}\right) \times (2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2})^3 = \frac{2}{6}(2\sqrt{2})^3 = \frac{16}{3}\sqrt{2}$

Ⅲ、面積と体積を求める

1、関数に囲まれた面積

(1) ①と②に囲まれた面積Sは、

$f(x)=x^2$ —①　　$g(x)=-x^2+2x+4$ —②

$f(x)$の頂点は $f'(x)=2x$, $x=0$, $(0,0)$

②を微分すると $g'(x)=-2x+2$

頂点は、$g'(x)=0$ とおいて、$0=-2x+2$、$x=1$ である。

そこで、$g(x)$に $x=1$ を代入して $g(1)=-1+2+4=5$ で

$g(x)$の頂点は $(1,5)$ となる。

グラフ①と②の交点は、$f(x)=g(x)$ を解くと、

$x^2=-x^2+2x+4 \longrightarrow 2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)=2(x+1)(x-2)=0$

よって、①と②は -1, 2 で交わる

すなわち、x方向は（ヨコ）（幅である）、$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲となる。 --- 幅

y方向（タテ）の長さを $h(x)$とすると、

グラフより、$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で $f(x)\leqq g(x)$ なので

$h(x)=g(x)-f(x)=-x^2+2x+4-x^2=-2x^2+2x+4$

すなわち、y方向（タテ）の高さは、$-2x^2+2x+4$ となる。 --- 高さ

これを定積分すると、

xの範囲（ヨコ）とyの方向の高さ（タテ）の関数がわかったので

$$S=\int_{-1}^{2}h(x)\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{2\times 2^3}{3}+2^2+4\times 2\right)-\left(-\frac{2\times(-1)^3}{3}+(-1)^2+(4\times -1)\right)$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9$$

微分方程式

2019.12.16
2019.12.23

1. 微分方程式は、自然現象や社会現象を表すための強力な武器

ある瞬間における現象の変化 — 導関数（微分）

↓

瞬間を次々につなげて行く — 積分

↓

微分方程式

Δxの変化の間のyの変化　$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

ある短い時間の変化 Δx

変化率は時間の間隔 Δxを0に近づけたときの極限

これを y' や $\frac{dy}{dx}$ と書き、yの変化率という

この変化率がyに比例するから、$\frac{dy}{dx} = ky$（kは定数）である

yの変化率が、その時点のyに比例する現象を表すのが、微分方程式である。

森羅万象と経済現象も表現できる

微分方程式の原理
指数、対数の微分

(1) 微分方程式

ある瞬間における現象の変化を 導関数を用いて表した方程式

瞬間の変化を"次々につなげて行く"…… 法則が生まれる

微分方程式を解くのが積分である。そして指数関数、対数関数が重要な役割を演じる。

(2) yの変化率がその時点のyに比例する現象を表わす微分方程式である

ある時間xから、短い時間Δxだけ経つ間に、yは
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ だけ変化する。
変化率は、時間の間隔Δxを0に近づけたときの極限だから、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ である}$$

この式を y' や $\frac{dy}{dx}$ と書き yの変化率という

(3) 分析したい現象

瞬間の動き

→ 導関数で表す → 微分方程式

← 積分

等式

微分方程式の解 → 現象の解明

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad ①$$

$\frac{dy}{dx} = ky$ ……① （微分方程式）

式の両辺を
yで割ると→ $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = k$ となるから、

xで積分して

$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int k\,dx$ である。

この式の左辺は、$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int \frac{1}{y}\,dy$ となるので

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx$ となる

$\frac{1}{y}$は積分すると $\log y$
（導関数の定義式）

左辺をyで、右辺をxで、積分して

$\log y = kx + C$ （Cは積分定数）となる

これを指数の形に直して

$y = e^{kx+C} = e^{kx}e^{C} = Ae^{kx}$ （e^CをAで表わす）

つまり、関数 $y = Ae^{kx}$ が微分方程式①の解である

この式から倍々の法則、xが1増えるとyが2倍になる式

$y = 2^{x-1}$ が導かれる

(1) 一定の倍率で変化する現象

(1) 倍々の法則

(2) 光が物質中を通過するときの明るさの減少

(3) 水の濾過の回数

(4) 化石の年代測定

----- 一定の倍率で変化する現象

(2) $\frac{dy}{dx} = ky$ ① $\rightarrow$ $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = k$

微分方程式①

xで積分して、

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int k\,dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int k\,dx$$

左辺をyで、 右辺をxで積分して

$\log y = kx + C$ （Cは積分定数）

(3) これを指数の形に直して

$y = e^{kx+c} = e^{kx} e^{c} = Ae^{kx}$ （e^{C}をAで表す）

つまり $y = Ae^{kx}$ が①の解である

微分方程式①の解

$y = Ae^{kx}$

$x=1$ のとき $y=1$

$x=2$ のとき $y=2$ だから

$$\begin{cases} 1 = Ae^{1k} & \text{——①} \\ 2 = Ae^{2k} & \text{——②} \end{cases}$$

② ÷ ①　$e^k = 2$ ——③

よって $k = \log 2$ 、これを①,③に代入

$1 = Ae^{\log 2}$, $e^{\log 2} = 2$

$\longrightarrow 1 = A2 \rightarrow A = \frac{1}{2}$

これを Ae^{kx} に代入して、

$$y = \frac{1}{2} e^{x \log 2}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\log 2})^x = \frac{1}{2} \cdot 2^x$$

$$= 2^{x-1}$$

微分方程式のいろいろ

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 - xy = 0 \qquad ①$$

$$y = ux \qquad ②$$

この両辺をxで微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + u\cancel{\left(\cdot\frac{dx}{dx}\right)}$$

これを①に代入すると

$y = ux$

$x \cdot y = x \cdot ux$

$$x^2\left(\frac{du}{dx}x + u\right) + (ux)^2 - x(ux) = 0$$

$$\therefore \frac{du}{dx}x^3 + \cancel{x^2u} + u^2x^2 - \cancel{x^2u} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{du}{dx}x + u^2\right)x^2 = 0$$

$x \neq 0$とすれば、

$$\frac{du}{dx}x = -u^2 \qquad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}$$

両辺を積分して

$$\int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x}$$

$\therefore \frac{1}{u} = \log x + C$　uをもとのyに変えて　式②から

$u = \frac{y}{x}$ より　$\frac{x}{y} = \log x + C$　$\therefore y = \frac{x}{\log x + C}$　(①の一般解)

線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x)$$ ① 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right)$$ ② 同次形

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$ ③ 1階1次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$$ ④ 2階1次の 〃

$$\left.\begin{array}{ll} A\text{に対する効果が} & a \\ B \quad 〃 & b \\ A+B \quad 〃 & a+b \end{array}\right\}$$ 線形の関係

$$\frac{d}{dx}(A+B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(A+B) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}\right) = \frac{d^2A}{dx^2} + \frac{d^2B}{dx^2}$$

1階線形微分方程式

p.115

23

ロジスティック曲線

人口増加や品物の売行きを表す

飽和状態（一定の限度があって、それ以上増加しない）のある現象。

飽和状態 p があるとすると、

$p-y$ は、y が p に近づくと 0 に近づくから、

微分方程式 $y'=ky$ の右辺に変化率の減少を表す $(p-y)$ をかけて、

$$\frac{dy}{dx}=ky(p-y) \quad \text{—①}$$

という微分方程式が考えられる。

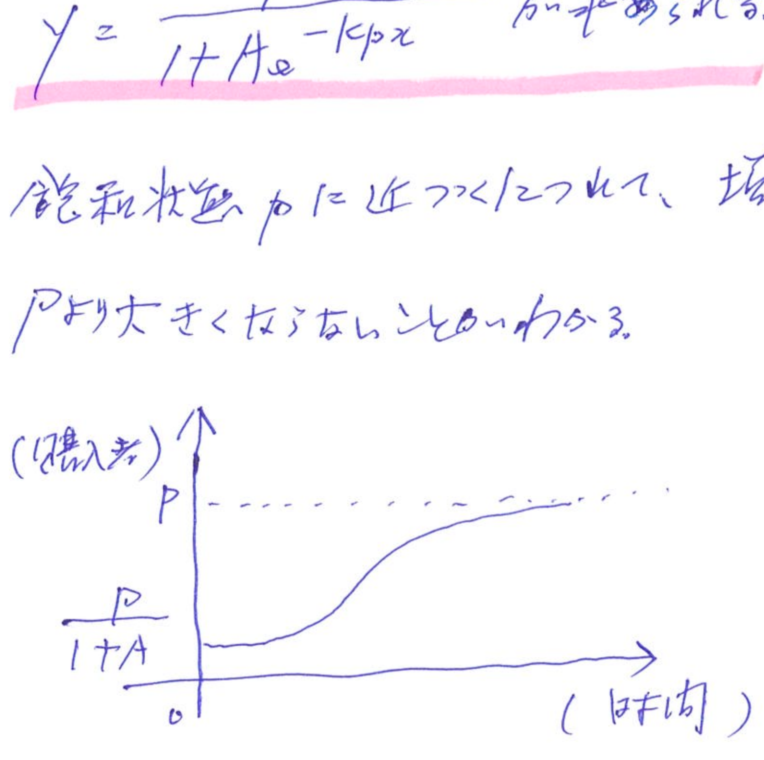
計算の結果　解

$$y=\frac{p}{1+Ae^{-kpx}}$$

が求められる。

飽和状態 p に近づくにつれて、増加の割合が減り、

p より大きくならないことがわかる。



$$\frac{dy}{dx} = ky(p-y)$$

両辺を $y(p-y)$ で割る

$$\frac{1}{y(p-y)}\frac{dy}{dx} = k$$

$\frac{1}{y(p-y)}$ に p を乗じ $\frac{p}{y(p-y)}$

$\frac{p-y}{y(p-y)} + \frac{y}{y(p-y)}$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{p-y}$　　$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{p-y}\right)$

参照

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{p-y}\right)\frac{dy}{dx} = k$$

（yで積分）　（xで積分）

$$\frac{1}{p}\{\log y - \log(p-y)\} = kx + c$$

$$\log\frac{y}{p-y} = kpx + cp$$

$$\frac{y}{p-y} = e^{kpx+cp}$$

$$y = \frac{pBe^{kpx}}{Be^{kpx}+1}$$

$$y = \frac{p}{1+Ae^{-kpx}}$$

?

誤り

?

×