6 仮想通貨時代を生き抜くための お金の教科書

慶応義塾大学教授
白井さゆり

2019.10.23
2019.10.28
2019.11.04
2019.12.09

1. 2017.12 ビットコインの価格が 1ビットコイン約2,300,000円の高値をつけた。

同年1月1日の価格はおよそ115,000円だったので 1年で20倍にふくれあがった

しかし 2018.12 360,000円に下落

2. 仮想通貨の優位性

(1) ブロックチェーンと呼ばれる非中央集権的な仕組み
(管理者不在の仕組)

(2) 暗号化技術を用いて取引を行うデジタル通貨

(3) 金融を大きく変えてゆく可能性

(4) 現代は、「仮想通貨時代へ突入した」と言える

(5) 本質と可能性をしっかりと理解した上で、
これとうまく付き合っていく道を探る必要がある

3. 人々の信用や信頼に基づいた現代の通貨制度

不換紙幣（フィアットマネー）

4. 将来の「お金」にまつわる不安

お金の本質の理解

(4) 世界最古の紙幣「交子」中国「宋」

唐（618~907）、の金属貨幣

宋（960-1279）銅貨　交子（紙幣）四川省

銅の不足→鉄貨（重くて不便→紙幣の発行）

交子（紙幣）には、硬貨や塩を担保として価値の保証
　一兌換紙幣

不換紙幣は金属との交換が保証されていない
　「信用」「信頼」に基づくフィアットマネー

「交子」は、西夏との戦費をまかなうため世界最初の法貨とな
　次第に兌換停止の「不換紙幣」へと変容

元（1271-1368）、明（1368~1644）時代
　政府が発行する紙幣が唯一の法定通貨（不換紙幣）

(5) スウェーデン　1661
　17C 世界初の銀行券の発行（兌換紙幣）

(6) 金本位制の確立　1816年イギリス

近代ヨーロッパ

本位貨幣　金貨の発行

自国通貨一単位の価値が、その貨幣に含まれる
一定量の金や銀と結びつく貨幣のこと「正貨」

(10) 米を介在させた日本独得の通貨制度

並列 (米本位制 (税物)
　　　 金銀銅本位制　　　ユニークなもの

年貢米 → マネー(通貨)換金 → 人件費その他の経費

→藩の赤字経済 ― 大商人からの借入れ ―

江戸経済　　米価 ―― 一定

江戸のモノ、サービスの取引 ― 価格上昇

↓　　　　　　　　↓

換金しやすい　　藩財政の圧迫

商品(作物)生産

江戸 ― 各地からの輸入　　江戸の消費

大阪 ― 各地から物資が集まり → 江戸へ輸出

札差 ―― 税物(米)を給される旗本や御家人から

米を買上げて換金する

「貨幣の改鋳」はなぜ行われたか？

の章を読んで 「異次元の緩和」の意味が少し分かりました。

日本では

江戸時代、金銀銅の豊富な金属資源を背景に
1600年代末までは、一般物価の価格が上昇する
(つまり通貨価値が低下する)「インフレ」状態が続いていた。

ところが、それ以降は、金銀の産出量が伸び悩み
「マネー(通貨)」の供給量の伸びが鈍化してゆく。
1680年代になると貨幣不足は深刻となり、
「マネー(通貨)」の価値は上がり、逆に物価は下落してゆく。
「マネー(通貨)」が不足すると、大都市江戸では全国各地のモノの
買入れ(輸入)に対する支払が難しくなり、江戸の経済活動は
停滞してデフレが発生した。

こうした事態を切り抜けるために幕府が行ったのが「改鋳」だった。
金の含有量を減らし、貨幣発行量を増やしてインフレを起こそうとした。

江戸時代の貨幣の改鋳は、「マネー（通貨）」の供給量を増やすための、
「金融緩和政策」だったと言えます。　これによって経済を活性化させ
ようとしたのです。

江戸時代における貨幣の改鋳（印象とは違うものがある）

綱吉時代の元禄8年（1695）「元禄の改鋳」

勘定奉行吟味役 荻原重秀が主導

貨幣の流通量は、最大で8割ほど増え デフレ圧力は和らぐ

↓

荻原のその後、宝永通宝、永字銀などの改鋳、新判
発行は、莫大な出目（改鋳益）を稼ぐとともに、
貨幣の供給が需要を超え、貨幣の過剰供給を招き、
ついにインフレを発生させてしまう。　1772 失脚

荻原の後を継いだ新井白石は、方針を転換し、通貨の金銀含有量
を元に戻す。しかし、これによって貨幣供給量は減少し、
深刻なデフレを招く。

このデフレの解決は、吉宗による「元文の改鋳」であった。

天保の水野忠邦の改革は失敗し幕府の財政再建は失敗する

黒船来航後は防衛に多額の費用がつぎこまれる

この時期、幕府は「御用金」で財政不足を補おうとするが
反発が大きく幕府の威光も低下する中、新政府が樹立される

(15) 中毒的な魅力を持つ貨幣改鋳

最初の改鋳 綱吉 元禄8年 1695年「元禄の改鋳」

柳沢吉保、荻原重秀

金含有率 84% → 57%

(慶長小判) (元禄小判)

↓

荻原は独断で 貨幣流通の活発化

宝永通宝、永字銀、三ツ宝銀、元禄文化

四ツ宝銀、乾字金などを発行

その結果 貨幣量 > 物 となり ついにインフレを発生させる

宝永の大地震、富士山噴火 … 物価の高騰に拍車がかかる

荻原は、政敵である新井白石に非難され失脚

新井白石は、金銀の含有量を元に戻す

これのことにより、貨幣供給量は極度に減少し、深刻な

デフレを引き起こす

このデフレを解消したのが 吉宗による元文の改鋳

低インフレと高成長の実現

天保の改革の失敗と幕府財政の破綻

水野忠邦の行った倹約令や年貢の徴収

需要が極端に抑制され デフレとなる

差出人: 山内公認会計士事務所 <yamauchi@3-cpa.com>
送信日時: 2019年10月29日火曜日 9:56
宛先: 白井 さゆり 様
件名: 読書感想文

白井 さゆり 先生

財政再建の失敗は、亡国への道であるということは、江戸の教訓である。
治者は先憂後楽を忘れ、識者は狼少年たらんとすることを忘れている。
日本はこれでいいのでしょうか。

中毒的な改鋳と大商人等からの借入れにより、黒船来航対策費増もあり、幕府の財政再建は失敗し、明治政府へと移行する。
今、改めて幕末の経済状況を見て、財政破綻に瀕した日本の財政を考えると、安易とも言える議論(FTPL や MMT)が語られている現状に不安を覚える。

財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、物価は緩やかに上昇し、それが常態化することで財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的である、とする。(FTPL プリンストン大学 シムズ教授)

急激なインフレにならない限りは、その限界を露呈することはない。巨額の財政赤字があっても、インフレも金利上昇も起こっていない日本は MMT の成功例であるとする意見もある。(MMT の主唱者の一人 ステファニー・ケルトン教授)

1944 年アメリカを中心とした 45 ヶ国は、ブレトンウッズで、ドルの価値を金の一定量に合わせて安定させることを決定(1 オンス＝35 ドル)し、その他の国々は、自国通貨をドルにリンクさせることになった。(「金ドル本位制」)
この新体制は、ドルを基軸にする新たな国際通貨体制であった。
ニクソンショックでアメリカがドル金本位制を放棄した後は、「不換紙幣」を中心とする通貨制度時代に入っている。
不換紙幣を中央銀行が際限なく発行するとハイパーインフレなど大インフレを起こす恐れがある。
中央銀行は、フィアットマネーの時代、「物価安定」を実現し、人々が安心して自国の通貨を使って買い物ができるような状況を維持することが至上命題となる。
この役割を果たすためには、景気拡大の局面では、景気が過熱して大インフレを招かないように金融の引き締めを実施し、逆に景気後退の局面では、金利を下げて景気を浮揚させる金融緩和策を導入し、政府の際限のない裁量から独立し、物価安定を図るという大切な使命を忘れてはならない。

山内公認会計士事務所
山内 眞樹　Masaki Yamauchi

Phone:098-868-6895, Fax:098-863-1495
E-Mail:yamauchi@3-cpa.com

5、キャッシュレス決済

(1) 現金にこだわる日本人

① 低金利 — 預金のメリットなし

② 現金のあふれ

③ 高齢化

(2) 消費増税と増税時のポイント還元

① 2014.4 5→8%へ増税 後の落ち込み

② キャッシュレス化の促進
　お金を循環させ、経済の活性化、効率化

(3) キャッシュレス

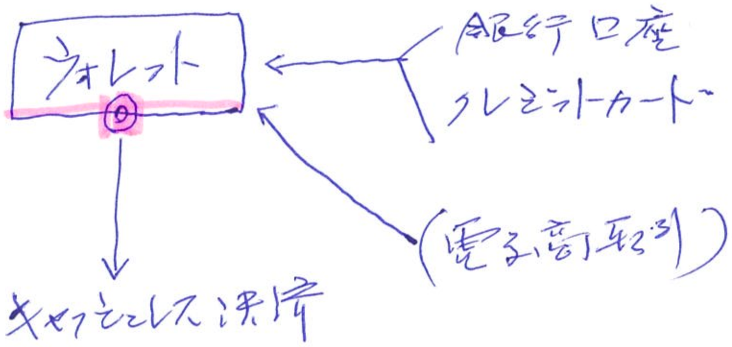
① プリペイド （交通系、流通系） Tマネー

② リアルタイムペイ （デビットカード、モバイルウォレット） PayPay

③ クレジットカード （ポストペイ） DCカード

(4) スウィシュ （スウェーデン 2012 年から運用）
　相手の電話番号を入れて、送金指示をするだけ
　手数料はかからない
　人口の 60 %が利用

(5) 中国



◎ アリペイなどの決済機関

(1) 購入者が商品を受取るまでの間
支払額を預る

(2) 売り手は、決済機関が代金を確保
しているので安心

(3) ウォレットでの入出金、送金も可能

◎ QRコードの読み取りによる代金決済

端末不要

金融のデジタル化による経済構造の変貌

都市部を中心に経済の効率性を高め、消費を喚起して
質の高い経済成長を実現するための道筋をつけた。

5、生残りに欠かせない姿勢

(1) 円の暴落は止できるか

異次元緩和　の ①金利の低下

②政府の財政規律の弛緩
半分は日銀が買占め
そのため国債の需給に歪曲に
危険

③ETFの買入れ

株価へ上昇
↓
今後は？

(2) 有望な仮想通貨の出現、研究

(3) 不動産投資は、

2020　オリンピック　↓

2025　大阪万博　↑

少子高齢化　↓

(4) 仕事が無くなって行く時代

(5) AI
今度こそ人間の仕事がなくなるのではないか。

(6) 格差の時代

経済

東京五輪後の日本経済

参考資料：(東京五輪後の日本経済 白井さゆり著 2017 小学館刊)
(非伝統的金融政策の経済分析 竹田陽介・矢嶋康次著 2013 日本経済新聞社)

○学んだ点

2019.10.07
2019.10.15
2019.10.22
2019.10.28
2019.11.04
2019.11.11
2019.11.25
2019.12.03

落盤がおきないか？
日銀債務の膨張

1、異次元緩和

2013.12 安倍内閣
2014.2

(円 80~100 | 2013 | 100~110)
(株 8000~10000 | 10,000~23,000)

1) 高騰する都心の不動産価格

① 日本銀行の異次元緩和 (大量のマネー供給)

② 東京五輪開催決定 (将来への期待)

1986~1991のバブルの思い出 (全国的不動産高、日経 38,957円)

今回は局所的・東京中心

~~実需を伴わない不動産建設ブーム (需要が見込まれていないのに)~~

2006~2007のミニバブル → リーマンショック

実需的な需要を伴っていた

今回 2017~ の

空虚で危険な建設ブーム

③ 不動産向け貸出
節税対策
個人のアパート等賃貸建設の増加
都心のオフィスビル建設

都心の一部
局所的現象
バブル時とは違い
実需を伴わない
住宅供給

① 実需はあるか

地銀のアパート建設融資の増加 対前年9%

不良債権化のおそれ

問題点
今後、アパートの居住者が大きく増えない見通しの中で
実需を伴わない住宅供給
将来の供給過剰
単独世帯を中心に増加傾向の世帯数も2020年頃から減少へ
家賃保証の罠 (家賃相場と連動)
空室の増加

節税商品としての賃貸住宅建設

日本の世帯数の減少が始まったとき

⑤ 持合株の解消と外国人株主の増加

長期的投資から短期的投資(3ヶ月)

将来の株価暴落の主因は外国人投資家

⑥ 円安

② ETF

③ ETF(株式の市場からの大量購入)は世界で初めての実験

円高 — 輸入企業が儲かる

円安 — 輸出企業が儲かる.

日本銀行のETF(指数連動型上場投資信託)の購入

数千億円 → 7兆円/2016

:2012

日本株では

世界第3位の株主

年金積立金管理運用独立法人(GPIF)

2014.3 21兆円 → 2017.6 36兆円

日本株の最大株主

2019.9 日銀の資産 569兆円

⑦ コーポレートガバナンスの後退 (利益)

法令の遵守と効率的な経営

④ 日本の株主(2020.11) 巨大な怪物を言わない株主

日銀(ETF) 40兆円 (6.7%)

GPIF(年金管理) 36兆円 (6%)

日銀 ETF 15兆円 (10%→)

GPIF 36兆円 (25%)

毎年6兆円増える

⑧ 日銀がETFを売るとき

③ 永久に買えるか、いつどのように売るのか

クジラと称される日銀のETF購入力(毎年6兆円)

リスク資産(ETF、REIT ... 兆円の株式....

日本銀行のリスク資産

③ 日本銀行は赤字決算にならないか

③ 外国人投資家による一斉の売り

⑤ リスク資産の大きさ

2020 国債 480兆円 / ETF 27兆円 → 507兆円 資産の89% (569)

純資産 4兆円

1%で5兆円

大企業のガバナンスの甘さ

④ 東京五輪後の金融危機（不動産価格）

金融危機のパターン

(イ) ノンバンク中心の金融危機

ノンバンクが過度にリスクをとった場合

(ロ) 各国の中央銀行が出口政策を実行し実行に移した時期

2008年以後の大規模な金融緩和政策

中央銀行が市場から大量の資産の買入れ

これが資産価格の上昇をもたらし → バブル

(ハ) 不動産価格

今回の不動産価格上昇の要因は何であったか。

異次元緩和 → 市場に大量のマネー供給、金利低下

東京五輪への期待

(ニ) 不良債権処理のために、不動産価格には、

さらに下落圧力がかかる。

(ホ) 歴史 ― 不動産価格の底（10年毎）

2002年 ― 2012年 ― 2022年 ―

2019.12.09
吉原実郎先生の書より

1、IT革命の本質

(1) 冷戦後の世界の変化の原因

① グローバル化

② IT革命

(2) ユビキタス

神はあまねく存在する

いつでも、誰でも、どこでも情報にアクセスできる

(3) IT革命とは、冷戦後にアメリカが主導した

軍事技術のパラダイム転換

シーフードレストラン「シーキャッチ」…コンピュータ発祥の地

IBMの前身の会社があった

(4) コンピュータの原形は、弾道計算の必要から生まれた

軍事目的からコンピュータの研究開発は始まった

(5) 2001年宇宙の旅

HAL 9000 (IBMのアルファベットの一つ前の文字)

中央制御の大型汎用コンピュータ …不安

↓

ネットワークの時代へ ← 「1984年」大型化の否定

小型コンピュータの分散系ネットワーク

(6) 冷戦の終了後 民生転用 → IT革命

2. インターネットの光と影

(光) 便利で効率的な生活

・つながることは、~~つながられることでもある~~ 両刃の剣

(影) 情報セキュリティの問題

コンピュータウイルス

GPS (Global Positioning System)

24h アメリカの 24個の軍事衛星へのアクセス

すべての位置情報は掌握されている

IT革命には、世界標準にして囲い込むこと（デファクト化）

と囲い込んだら勝手にいじらせない（プラットホーム化）がある

インターネットもGPSも、軍事目的によってアメリカの

開発したものである。

それに依存することは、暗黙のうちにアメリカの優位性

に身を委ねることになる

3、世界経済のメガトレンド

自分はいま、どこにいるのか。

経営の本質は、時代認識

いま、どんな時代を生きているのか

世界の構造変化が起こりつつあります。

手垢のついた固定観念で腑分け

グローバル化と全員参加型秩序

アジアダイナミズムとネットワーク型の世界観

IT革命の本質

食と農業の未来

技術と産業の創生とTPP問題

エネルギーパラダイムの転換

4. 2011.10.31 世界の人口

世界の人口は 70億人に達した

年平均 8千万人は増加し、国連の推計では

〜1億人

2050年に 93億人に達し、インドが世界一の

人口を持つことになる

日本の人口

1968年 —(40)— 2008年 —(40)— 2048年

年間 年間

98,000千人 ↗ (128,000千人) ↘ 98,000千人

+30,000千人 △30,000千人

40年継続

右肩上りのトレンド 右肩下がりのトレンド

1900年	2013年	2028年	2050年
65才以上 人口の5%	25%	30%	40%

増える世界人口と 減少する日本の人口

5、世界の秩序

19C　　列強

1945　　アメリカとソ連
戦後　　資本主義　社会主義

1989年　　アメリカの一極支配
ベルリンの壁

2000年　　G7、G8
多極化
↓
G20　BRICs
↓
無極化
↓
G0
アフリカ、中東、アジアの攻勢

新しい世界秩序

6、アジアの台頭、世界の繁栄はアジアにシフトする

世界
2015年　GDPの　30%

2040年　〃　50%

日本の経済は、対アジアが重要化

2012年　貿易相手国
アジア　50%
（中国　20%）

―― アジアのダイナミズム ――

太平洋戦争中に行ったこと
(1) 韓国
(2) 中国
(3) アジア近隣諸国

その事実を踏まえた上でポジティブな行動を起こすことの必要性

深呼吸をして歴史の英知に学ぶ必要性

2012年の貿易統計

日本の貿易収支は、6兆9千億円の赤字である

―輸出力で外貨を稼ぎ、食料は海外に依存

する―というロジックが崩れはじめた。

現在、日本が、海外から買う食料の総額は、

5兆9千億円にのぼるが、これは今後も

続けられるのか！

2. 日本の武器は技術力しかない

育てる資本主義への転換

2019.08.26
2019.08.05
2019.06.24
2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

積　分　の　定　石

（変化する量を集めて形にする）

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。（微分と積分なるほどゼミナール　S58.1 岡部恒治著　日本実業出版社刊）
（微積分のはなし　1985.3 大村平著　日科技連刊）（Excel で学ぶ微分積分　H24.8 山本将史著オーム社）
（イラスト図解微分・積分　2009.6 深川和久著　日東書院刊）（微積分を知らずに経営を語るな PHP新書）
（Excel でやさしく学ぶ微分積分　室　淳子著 2006 東京図書）
内山力著

2019.10.07
2019.10.14
2019.10.28
2019.11.11
2019.12.09

Ⅰ　身近な積分

1．積分の歴史

⑴ 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。（どうやって全体の面積を把握するか）

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

現象を表現し ― その変化を把握し ― 結果を…

$y=f(x)$　　$y'=f'(x)$　　$S=\int_a^b f(x)dx$

表現（現象）　微分（変化）　積分（結果）

社会科学 }
自然科学 } ⟶ グラフに描く ⟶ 機何学の問題になる

（現象）　―（変化）　―　（結果）

積分→結果どうなったか、小さな変化をどのように形とするか
小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ねるとどうなったかとその結果
曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
変化する様子、変化する量をどうやって集めるか

変化する量はどんな形になるのか

∫　→インテグラルが付くと積分することを表す（　〃　）

S（SUM）のこと、整数は Σ　　それに小さいものを

∫小さいものを集める!!

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

経済学のための
数学入門

途中

第4章　積　分　法

(1)　不定積分

ある関数（たとえば総費用関数）$C=F(x)$ があり，その導関数（すなわち限界費用曲線）は，

$$\frac{dC}{dx}\equiv F'(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で示された．「微分」の章では，ある関数から導関数を得る方法およびその意味が説明された．ここでは，反対に，限界費用曲線 $F'(x)$ からもとの総費用関数 $F(x)$ を求めるというような，逆の手続きが検討される．

導関数が $f(x)$ である関数 $F(x)$ があるとしよう．つまり，

$$F'(x)=f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であるが，このとき，$F(x)$ は $f(x)$ の不定積分（indefinite integral）または原始関数（primitive function）と定義される．原始関数 $F(x)$ は，

$$\int f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

で表わされる．得られている $f(x)$ から，原始関数を求めることを，「積分する」という．積分される関数 $f(x)$ は被積分関数（integrand），x は積分変数と呼ばれる．$\int$ および dx は，$f(x)$ を積分するという印の記号と理解してよい．

$F(x)$ が $f(x)$ の不定積分の１つであれば，$f(x)$ の任意の不定積分は，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{は定数}) \qquad \cdots\cdots④$$

で表わされる．C は，積分定数（integration constant）と呼ばれる．いま，$f(x)$ の1つの不定積分を $F(x)$，他の1つの不定積分を $G(x)$，すなわち，$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$ としよう．$H(x)=G(x)-F(x)$ として，

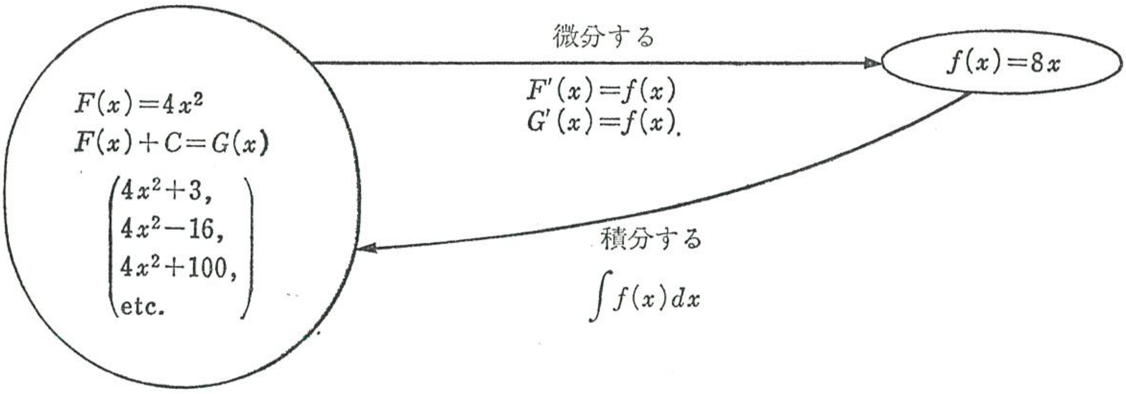
$$H'(x)=[G(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

である．$H'(x)$ が常にゼロであれば，$H(x)$ は定数であるから，それゆえ，

$$C=G(x)-F(x) \quad (C\text{は定数}),$$

$$\therefore\quad G(x)=F(x)+C \qquad \cdots\cdots⑥$$

となり，④式が証明される．以上のことを理解するために，次のような図を書いておこう．



微分法と不定積分は，いわば，ごく近い親戚関係にある．つまり「微分する」ということと「積分する」ということは，お互いに逆の演算という関係にある．それゆえ，微分法についての知識は，不定積分を求める際に当然役立つ．以下に，次のような不定積分の諸公式を整理しておく．

（ベキ関数の公式）

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n \neq -1) \qquad \cdots\cdots⑦$$

（定数倍の公式）

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k\text{ は定数}) \qquad \cdots\cdots⑧$$

（定積分の定義）

関数 $y=f(x)$ の不定積分を $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ とし、

a, b を $f(x)$ の定義域の任意の値とするとき、

点 b での不定積分の値と、点 a での不定積分の値との差は

$$\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となり、C の値に関係なく、a, b の値だけで決まる。

この $F(b)-F(a)$ を、

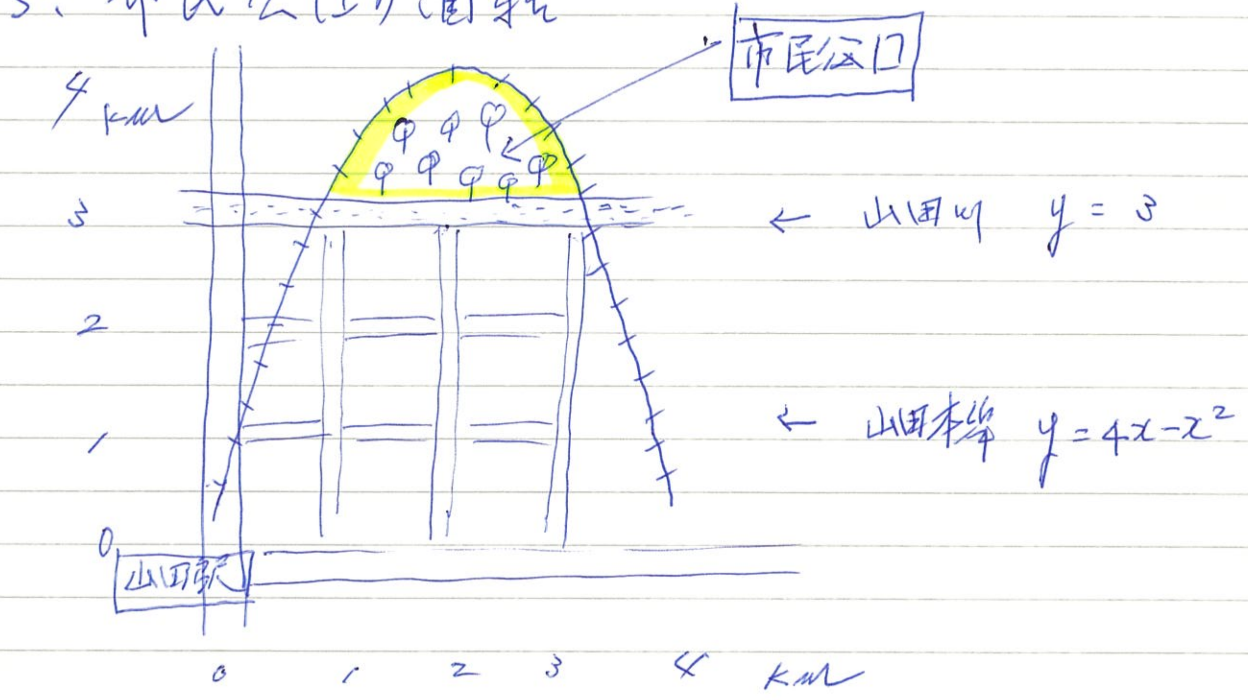
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{または、} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く。}$$

これを、関数 $f(x)$ の定積分といい、

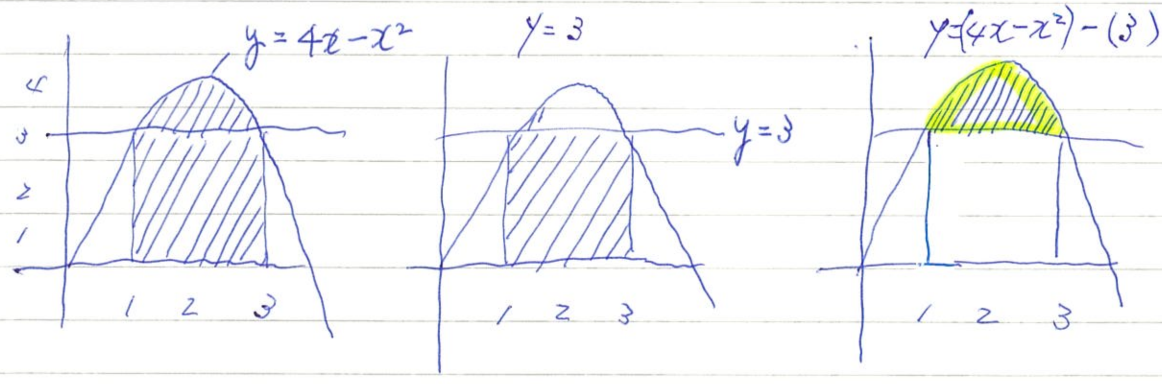
a を下端、b を上端という

この定積分を求めることを、関数 $f(x)$ を a から b まで積分するという

5. 市民公園の面積



Ⓐ − Ⓑ = Ⓒ



$$\int_1^3 (4x-x^2)\,dx = \left[\frac{4}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

$$\int_1^3 3\,dx = \left[3x\right]_1^3 = (3\times3)-(3\times1) = 6$$

2つに分けて計算した後、計算する.

$$\frac{22}{3}-6=\frac{4}{3}\ (km^2)$$

Ⅲ、面積と体積を求める　F

1、関数に囲まれた面積

(1) ①と②に囲まれた面積 S は、

$f(x) = x^2$ ―①　　$g(x) = -x^2 + 2x + 4$ ―②

$f(x)$ の頂点は $f'(x) = 2x$、$x = 0$、$(0, 0)$

②を微分すると $g'(x) = -2x + 2$

頂点は、$g'(x) = 0$ とおいて、$0 = -2x + 2$、$x = 1$ である。

そこで、$g(x)$ に $x = 1$ を代入して $g(1) = -1 + 2 + 4 = 5$ で

$g(x)$ の頂点は $(1, 5)$ となる。

グラフ①と②の交点は、$f(x) = g(x)$ を解くと、

$x^2 = -x^2 + 2x + 4 \longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2(x+1)(x-2) = 0$

よって、①と②は -1, 2 で交わる

すなわち、x 方向は（ヨコ）、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲となる。 ---幅

y 方向（タテ）の長さを $h(x)$ とすると、

グラフより、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x) \leqq g(x)$ なので

$h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 2x + 4 - x^2 = -2x^2 + 2x + 4$

すなわち、y 方向（タテ）の高さは、$-2x^2 + 2x + 4$ となる。 ---高さ

これを定積分すると、

x の範囲（ヨコ）と y の方向の高さ（タテ）の関数がわかったので

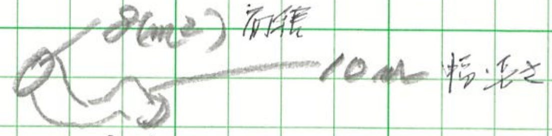
$$S = \int_{-1}^{2} h(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{2 \times 2^3}{3} + 2^2 + 4 \times 2 \right) - \left(-\frac{2 \times (-1)^3}{3} + (-1)^2 + (4 \times -1) \right)$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) = 9$$

2. 関数に囲まれた体積

積分は面積を求めるばかりでは無く、
かけ算をして意味がある全体量ならば、
xの範囲がわかって、yが関数で表わされれば、定積分が使える。



(1) 例えば、曲がってはいるが、どこを切っても断面積が 8 (m^2) となる
長さ 10 (m) の管の体積 V_1 は、　高さ 面積
長さの方向を x方向とし、断面積を積み重ねて体積を求めると、

$$V_1 = \int_0^{10} 8\,dx = \Big[8x\Big]_0^{10} = 80 \ (m^3)$$

y軸 (断面積)高さ　x軸 (長さ・幅)

$8\,(m^2) \times 10\,(m) = \underline{80\ m^3}$

(2) 次に、形はわからない物体の体積 V_2 は、
方向の長さが 5 で、断面積 S は $3x^2+10$ とすると、

$$V_2 = \int_0^{5} (3x^2+10)\,dx = \Big[x^3+10x\Big]_0^{5} = 175$$

x軸 幅と

$(3x^2+10)\,\underline{m^2} \times dx\,\underline{m}$

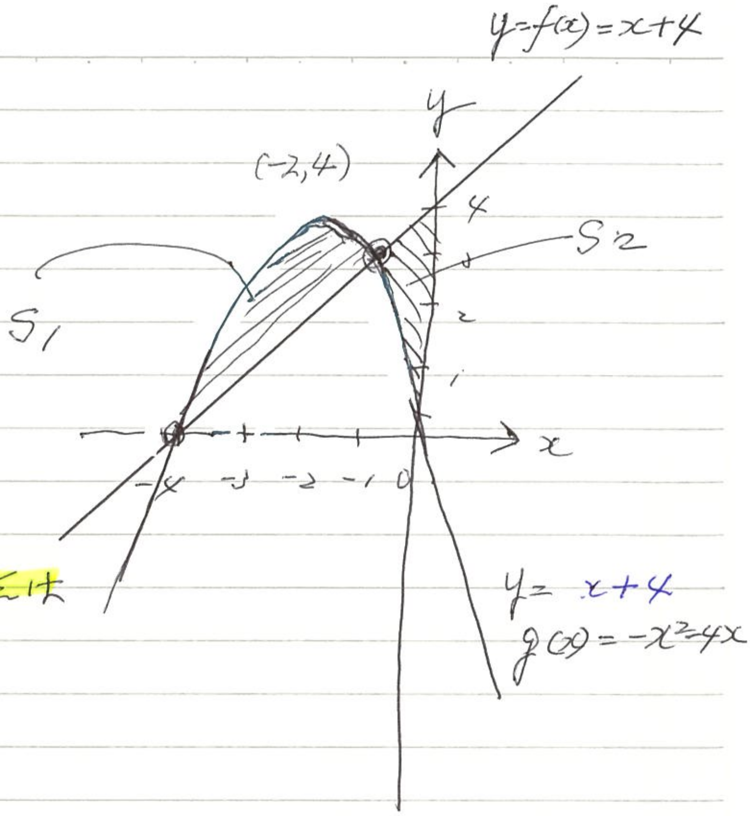
断面積・高さ y軸

$\frac{3}{3}x^3+10x = (5)^3+10(5) = \underline{\underline{175\ m^3}}$

交差する関数に囲まれた面積

$f(x) = x+4$

$g(x) = -x^2-4x$



(1) グラフを描く、頂点を求める

$f(x) = x+4$

$g'(x) = -2x-4 \to x=-2$

$x=-2$ のとき $g'(-2)=0$ で、

$g(-2)=4$ なので $g(x)$ の頂点は

$(-2,4)$

(2) 交点を求める

$f(x)=g(x)$ の2次方程式を解くと

$x+4=-x^2-4x \to x^2+5x+4=0 \longrightarrow (x+1)(x+4)=0$

よって $x=-4, -1$ で、交点は $x=-4 \to y=-4+4=0$ $(-4,0)$

$x=-1 \to y=-1+4=3$ $(-1,3)$

(3) y 方向の長さを求める

グラフより S_1 の $-4 \leqq x \leqq -1$ で、$f(x) \leqq g(x)$

S_2 の $-1 \leqq x \leqq 0$ で、$f(x) \geqq g(x)$

(4) 定積分

?

$S_1 = \int_{-4}^{-1} \{g(x)-f(x)\}dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2-5x-4)dx = -\int_{-4}^{-1} (x+1)(x+4)\,dx$

$= \frac{1}{6}(-1+4)^3 = \frac{9}{2}$

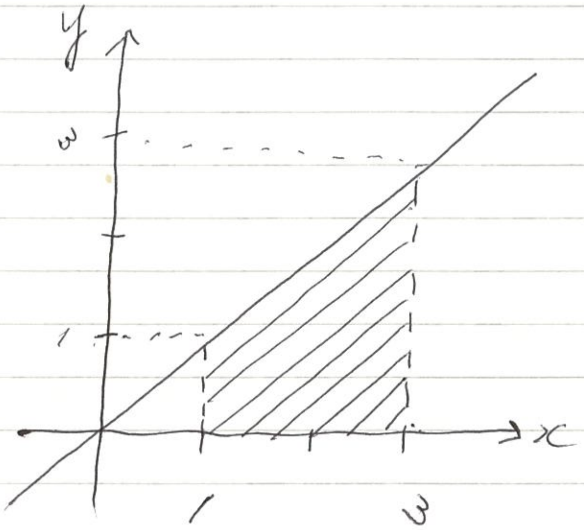
$S_2 = \int_{-1}^{0} \{f(x)-g(x)\}dx = \int_{-1}^{0} (x^2+5x+4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}(x^2)+4x\right]_{-1}^{0}$

$= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right) = \frac{11}{6}$

正

定積分で面積を求める （グラフに囲まれた面積を求め

$y = x$ の定積分



1から3の範囲で定積分する

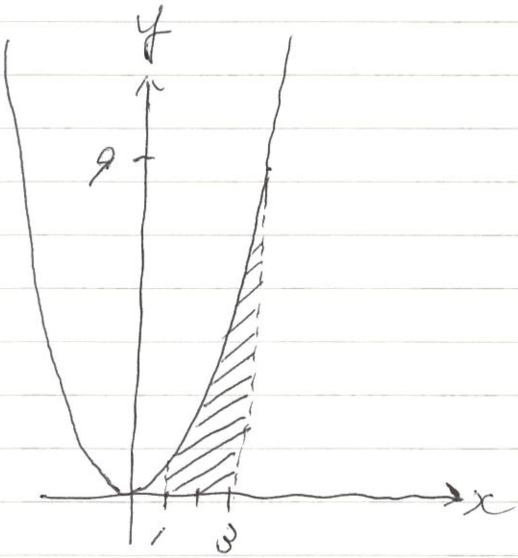
$y=x$ 高さ　微小のx 長さ

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$y = x^2$ の定積分

1から3の範囲で定積分する



$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

正

9　$v = f(t)$

横軸にtを 縦軸にvをとり

tをある値に固定すれば vの値も決まるとする

このとき、vはtの関数であるといい

$v = f(t)$ で表わす

$v = t^2 + t$,　$v = \sin t$ ……

tの値を決めると vの値が決まる.

tが0から t_a の範囲で面積を求めるとすると

積分する

$\int_0^{t_a} f(t)\,dt$　　タテ(高さ)×ヨコ(幅)を表す

v　　t

高さv　　幅 dt

長さ・時間

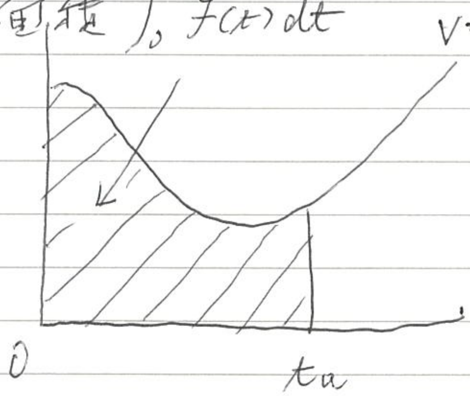
d(t)で微分したときのvの変化

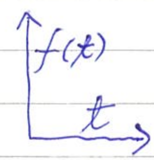
ヨコの変化　　タテの変化

温度・意識など

目視の数値化

面積 $\int_0^{t_a} f(t)\,dt$　　$v = f(t)$





高さ　幅

ふつうはこれを$F(t)$と書き、　$F(t) = \int_0^{t_a} f(t)\,dt$ とする

7. 微分方程式

(1) ある変化する量があって　$f(x)$

(2) その全体が分かりにくい　動きの先が分りにくい

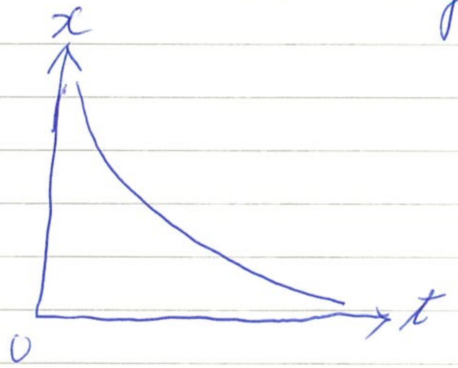
(3) (1)が変化するとき、それを微分方程式で表す

8. タンクの液体が減る速さ

液体の出る速さ（液面の変化の速さ）は、その面の高さ（液体の量の大きさ）に比例する。　変化の速度は○○に比例する

液体の面の高さ x の変化の速さ　$\dfrac{dx}{dt} = -ax$

y が x に比例するとき、$y = ax$，x は減少するので $-a$



お湯の冷める早さ（x お湯と周囲の温度差）

$\dfrac{dx}{dt} = -ax$

ラジウムの崩壊の早さ（ラジウムの量 x）

$\dfrac{dx}{dt} = -ax$

9. 微分方程式の使い方

(1) 全体の様子はよく分らないけれど....

(2) 今、見ているものの変化の様子はよく分る。

↓

伝達、大変な威力を発揮する

微分方程式

2019.12.09

1、落下の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

空中を落下する物体の運動

t：経過時間　x：落下距離　dx/dt：落下速度

m：重力 ……物体が地球上で地面に引きよせられる力（月と地球で変化

g：質量 ……質量、物体そのものの重量（月でも地球でも同じ）

$k\frac{dx}{dt}$：空気抵抗の力が速度$\left(\frac{dx}{dt}\right)$に比例する、$k$は比例定数

mg：引力

v：速度　$dx/dt = v$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$ …… 落下速度が小さい場合

落下速度　速度－空気抵抗

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$ …… 落下速度が大きい場合

2、微分方程式の解法　（変数分離形の微分方程式）

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv} \quad \text{—①}$$

積分
↓

$$\int m\frac{dv}{dt}dt = mv + C$$

第1項

$$\int mg\,t + C$$

第2項

微分方程式の解法が必要

微分方程式を解く ……その方程式が成立するような関数の形を見い出す

①式の両辺を m で割ると

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg-kv}{m} \rightarrow \frac{m}{mg-kv}dv = dt$$

両辺を t で積分すると

$$\int \frac{m}{mg-kv}dv = \int dt$$

↓

$$-\frac{m}{k}\log(mg-kv) = t + C \quad \text{—④}$$

$$\therefore \log(mg-kv) = -\frac{k}{m}(t+C)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+C)}$$

$$\therefore v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+C)}\right\} \quad \text{—②}$$

v を t の関数として表わすことに成功　②は①の一般解

3. 初期条件

$$v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\} \quad —②$$

②は一般解であり、現象を説明する式としては不完全なので、
Cの値を決める必要がある

物体が落下しはじめた瞬間が経過時間のスタートなので、

落下しはじめた瞬間

$t=0$, $v=0$ （スタートの初期条件）

$$0 = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}c}\right\} \quad 0+c$$

$$\therefore \quad e^{-\frac{k}{m}c} = mg$$

$$\therefore \quad c = -\frac{m}{k}\log mg \quad —⑤$$

④式に⑤式を代入して

$$-\frac{m}{k}\log(mg-kv) = t - \frac{m}{k}\log mg$$

$$\therefore \quad -\frac{m}{k}\log(mg-kv) + \frac{m}{k}\log mg = t$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad v = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad —⑥$$

4. 現在高に比例して利息が付加されていく場合

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$\downarrow$

$\frac{dx}{x} = a\,dt$ と両辺にxを分離し、積分すると

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt$$

$\therefore \quad \log x = at + c$

$t=0$ のとき $x = A$ として

$x = Ae^{at}$

$x = e^{at+c} = e^{at}e^{c}$

C を A として Ae^{at}

5. 肉まんの冷却

蒸したての温かい肉まんは、冷たい空気中に放置しておくと、だんだんと温度が下がって、外気の温度まで冷える。温度の下り方は、肉まんと外気の温度差に比例する

この方程式は

$$-\frac{dT}{dt} = kT$$

t：時間
T：外気との温度差

（又は $\frac{dT}{dt} = -kT$ ）

ある瞬間の温度差 T に比例して、T が減少するので $\frac{dT}{dt}$ にマイナスがついている。

変数分離形の微分方程式として解くと、

$$\int \frac{dT}{T} = -k \int dt$$

$$\therefore \log T = -kt + C \quad \text{——} ①$$

これに初期条件を入れて、$t=0$ で $T=T_0$ とすれば

$C = \log T_0$ この式を①に代入して

$\log T = -kt + \log T_0 \quad \therefore \log \frac{T}{T_0} = -kt$

$\therefore \frac{T}{T_0} = e^{-kt} \quad \therefore T = T_0 e^{-kt}$

ます．そうすると，図に小さな字で書き込んだように

$kt=0.5$ が 4分

に相当することがわかります．したがって

$$k=\frac{0.5}{t}=\frac{0.5}{4分}=0.125/分$$

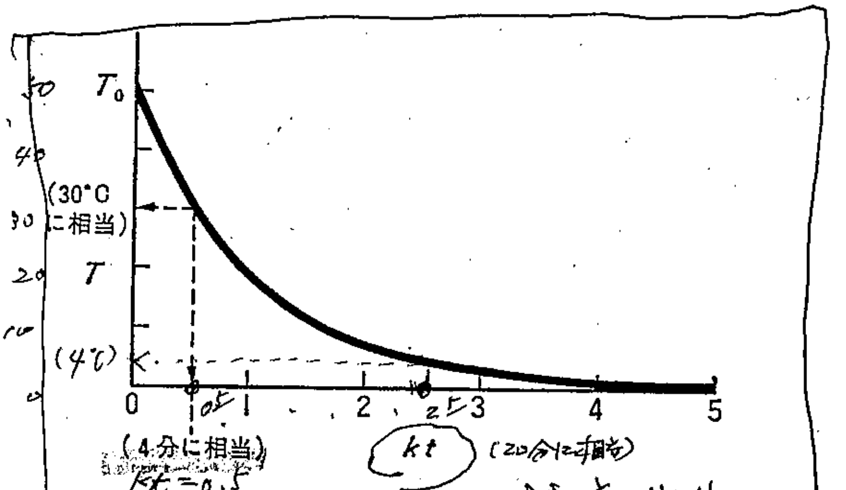


図 12.2

であることになります．この肉まんを，さらに16分間放置しておいたら，外気との温度差は，いくらになるでしょうか．

$t=0$から通算すると，合計20分間だけ放置しておくかんじょうになりますから

$$kt=0.125/分\times 20分=2.5$$

です． kt が 2.5 のときの温度差 T は，図からすぐに読みとれます．約 $0.08\,T_0$， つまり 4°C です．

x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.0	1.000	1.0	0.368
0.1	0.905	1.5	0.223
0.2	0.819	2.0	0.135
0.3	0.741	2.5	0.082
0.4	0.670	3.0	0.050
0.5	0.607	3.5	0.030
0.6	0.549	4.0	0.018
0.7	0.497	5.0	0.0067
0.8	0.449	6.0	0.0025
0.9	0.407	7.0	0.0009

図12.2 を描くために使った e^{-x} の値を表に書いておきました．このグラフと表は，身のまわりの現象を説明するのに，非常に役だつことが多いからです．いまは，肉まんの温度を例にとりましたが，減少速度が現在高に比例するような現象が，私たちの身のまわりには，いっぱいあります．その一部を引き続きご紹介していきましょう．

減 衰 曲 線

水中に射し込む光は，途中でだんだんと吸収されてしまいます．し

7. 減衰曲線

(1) 水中に射し込む光は、だんだんと吸収され明るさは減少する

方程式に書けば $\dfrac{dB}{dx} = -kB$

B：明るさ　x：水深

$B = B_0 e^{-kx}$　　B_0 は $x=0$ 水面の明るさ

(2) ラジウムなどの放射性物質の自然崩壊

崩壊速度は、残存量に正比例する

$\dfrac{dM}{dt} = -kM$

M：放射性物質量，t 時間

$M = M_0 e^{-kt}$

M_0：$t=0$ のときの放射性物質の量

(3) 池の魚の残っている数

$\dfrac{dN}{dt} = -kN$

N：池の中の魚の数，t 時間

$N = N_0 e^{-kt}$　　N_0：最初の魚の数

減衰曲線で説明される現象は、残量が多いうちは減少が急だったが、残量が少なくなるにつれて減少の度合いが鈍化する。しかしいつまでたってもゼロにはならない

8 半減期による方法

残量が元の量の $\frac{1}{2}$ になるまでの時間を寿命のめやすとする

$$X = \frac{1}{2}X_0 \text{ であり}$$

$$e^{-kt} = 0.5$$

このような寿命を半減期とよぶ

$$\log e^{-kt} = \log 0.5$$

$$\log e = -\frac{}{kt}\log 0.5$$

$$-\log e/\log 0.5 = kt$$

$kt = 0.69314$

See 6頁

ラジウムの場合

$$k \times 1622\text{年} = 0.7$$

$$k \fallingdotseq 0.00043/\text{年}$$

$0.69314 = k \times 1622$

$0.69314/1622 = 0.00043$

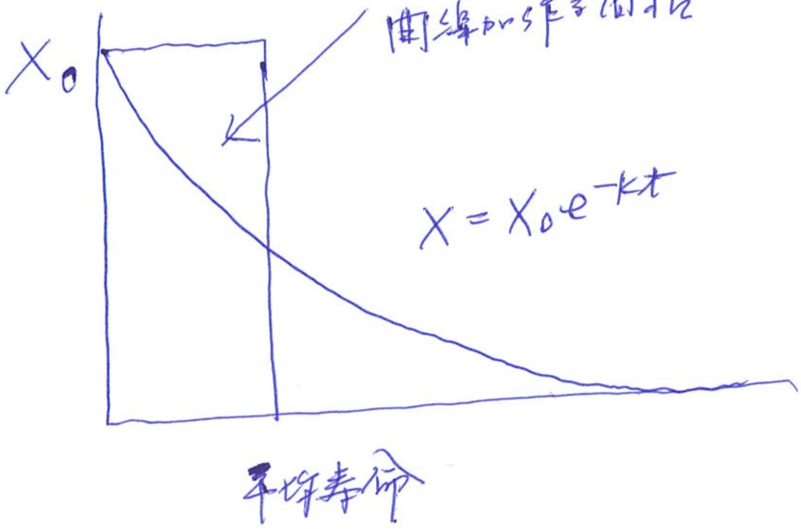
はじめのラジウムの量が M_0g あったとすると、

t年後に残存しているラジウムの量 M は

$$M = M_0 e^{-0.00043t} \quad (t: \text{年})$$

物質によって半減期が一定しているので、ある物体に含まれている放射性物質の量を測れば、その物体が誕生してから何年を経過しているかを計算することができる。　マンモスの化石から、マンモスの生存していた時代を推定できる

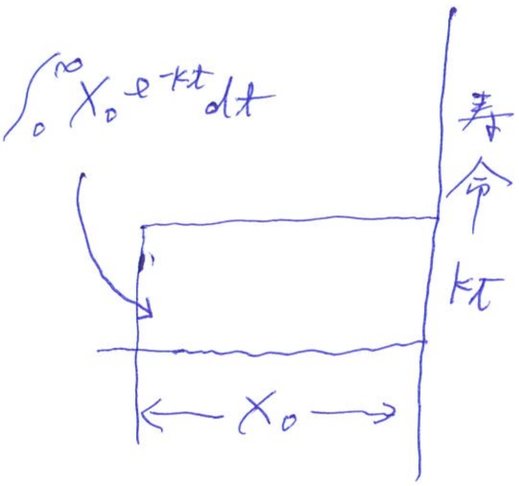
2. 平均寿命による方法



$$\frac{\int_0^\infty X_0 e^{-kt}\,dt}{X_0} = \int_0^\infty e^{-kt}\,dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^\infty = \frac{1}{k}$$

平均寿命 $t = \frac{1}{k}$

$$X_0 e^{-k\cdot\frac{1}{k}} = X_0 e^{-1} \fallingdotseq 0.37 X_0$$



半減期は $e^{-kt} = 0.5$

$kt \fallingdotseq 0.7$

$t = 0.7\frac{1}{k}$

∴ 半減期 = 0.7 × 平均寿命

10. ナポレオンの法則

からす軍の兵数　K

とんび　〃　T

敵軍の数が多ければ味方の犠牲者は多くなる

$$\frac{dK}{dt} = -\tau T \quad \text{—①}$$

$$\frac{dT}{dt} = -kK \quad \text{—②}$$

トンビ軍の能力

τ：訓練や装備によって決まる定数

k：　〃

カラス軍の能力

↓

連立微分方程式

② × τT　① × kK

$$\underbrace{kK\frac{dK}{dt}}_{④} - \underbrace{\tau T\frac{dT}{dt}}_{⑤} = 0 \quad \text{—③}$$

④を t で積分

$$k\int K\frac{dK}{dt}dt = k\int KdK = \frac{1}{2}kK^2$$

⑤を t で積分

$$-\tau\int T\frac{dT}{dt}dT = -\tau\int TdT = -\frac{1}{2}\tau T^2$$

③の両辺を t で積分すると

$$\frac{1}{2}kK^2 - \frac{1}{2}\tau T^2 = C \quad \therefore kK^2 - \tau T^2 = c$$