経済

# 東京五輪後の日本経済



参考資料：（東京五輪後の日本経済 白井さゆり著 2017 小学館刊）
（非伝統的金融政策の経済分析 竹田陽介・矢嶋康次著 2018 日本経済新聞）

○学んだ点

2019.10.07
2019.10.15
2019.10.22
2019.10.28

落下を免れないか 日本経済

1、不 異次元緩和　2014～

1）高騰する都心の不動産価格

①日本銀行の異次元緩和（大量のマネー供給）

②東京五輪関係投資（将来への期待）

1986～1991のバブルの思い出（全国的不動産高、日経38,957円）

今回は局所的・東京中心

実需を伴わない不動産建設ブーム（需要が見込まれていないのに）

2006～2007のミニバブル　リーマンショック

実体的な需要を伴っていない

今回 2017～　の

③ 不動産向け貸出

節税対策

個人のアパート等貸家建設の増加

都心のオフィスビル建設

空虚で危険な建設ブーム

都心の一部 局所的現象 バブル体質と違い

実需を伴わない住宅供給

①実需

地銀のアパート建設融資の増加 対前年9%

不良債権化のおそれ

問題点

~~今後、アパートの居住者が大きく増えない見通しの中で~~

実需を伴わない住宅供給

節税商品としての賃貸住宅建設

将来の供給過剰

日本の世帯数の減少が始まったとき

単独世帯を中心に増加傾向の世帯数も2020年頃から減少へ

家賃保証の罠（家賃相場と連動）

空き家の増加

⑤ 持合株の解消と外国人株主の増加

長期的投資から短期的投資（3年）

将来の株価暴落の主因は外国人投資家

⑥ 円安

円高 — 輸入企業が儲かる

円安 — 輸出企業が儲かる.

② ETP（株式の市場からの大量購入）は世界で初めての実験

日本銀行の ETF（指数連動型上場投資信託）の購入

数千億円 :2012 → 7兆円/2016

日本株では世界最大の株主

年金積立金管理運用独立行政法人（GPIF）

2014.3 21兆円 → 2017.6 36兆円

日本株の最大株主

⑦ コーポレートガバナンスの後退（利益）

法令の遵守と効率的な経営

物を言わない株主

日銀 ETF 15兆円（10%→） GPIF 36兆円（25%）

毎年6兆円増える

④

日本の株主（2020.11）

日銀（ETF）40兆円（6%）

GPIF（年金管理法人）36兆円（6%）

⑧ 日銀の ETP を考えるとき

? 永久に買えるか いつどのように売るのか

ゆっくりと確実な日銀の ETP 購入力（毎年6兆円）

リスク資産（ETF、REIT いろいろ兆円の株式……

日本銀行のリスク資産

⑤

リスク資産の大きさ

? 日本銀行は債務超過にならないか

? 外国人投資家による売り

2020 国債 460兆円 ETF 40兆円 ＞ 500兆円 経済の83%

純資産 40兆円

1%で 50兆円

大企業のガバナンスの甘さ

2012.12 第二次安倍内閣 K

白川総裁の退任 2013.1

(1) 過度な円高

(2) 金融緩和の不足

## 3、日本経済の不都合な真実

### (1) デフレからの脱却

1990年代~

(3) リスクをとらない

デフレとは、モノやサービスの価格が継続的に下がっていく経済状態

↓

顕著に、従業員の給与が下がる

企業の販売価格が上がらない

### ⑥ 異次元緩和の効果

(1) 極端な円高の是正　1ドル 80円→12

(2) 〃 株安 〃　10,000円→20,0

(3) 失業率の改善　3%台前半

(4) 金利水準の低下

効果がなかったこと

(1) 経済成長が一向に伸びなかった

1~1.5% → 1.2%

(2) 賃金上昇の低下

~~(3) 物価上昇はなかった~~

### (2) デフレマインド

企業や家計のデフレマインド

統計上の物価指数
(ほとんど価格上昇なし)

<家計が認識する物価変化率
(物価が上がっている)

OECD
世界
↓ 日本だけ デフレ

### ⑦ デフレは消費者国民の不安

(1) 日本経済は、金融緩和政策によって
たくさんの需要を作り出せる — 体質ではなくなってきている

—日本型デフレ—の真の要因
消費者心理との乖離 $\boxed{\text{国民の不安}}$

日本だけ
デフレからなぜ
脱出できないのか

高齢化の進展、働き手の減少

バブル後の身の丈生活の定着

膨大な政府債務

将来に対する不安

# 5. 世界経済のゆくえ

## (7) 中国経済の問題点 Ⓐ. Ⓑ. Ⓒ

A

① 企業債務の問題 過剰債務

地方政府出資の投資会社の債務、民間企業の債務

GDP比で 170%〜200% (2,500〜 兆円)

② 家計債務

住宅価格高騰、住宅ローン債務

約600兆円 (政府債務 600兆円)

③ 公的・民間の総債務 (2,500〜3,000兆円)

④ シャドーバンキング

銀行もかかわっている

[illegible]
[illegible]
コーヒー

B

⑤ 企業の過剰生産能力

リーマンショック後の景気刺激策

⑥ 鉄鋼産業の過剰生産能力

5年間で1億〜1.5億トン削減目標

=日本の年間粗鋼生産量

↓

大量の失業者の発生

⑦ 資本流出の問題

2015年 約1兆ドル 国外流出

日本のGDPの$\frac{1}{5}$，100兆円

対ドル元ペッグ
↓
減速化

⑧ 人民元売りの心理

高い成長
高い金利
→ 成長の減速
経済問題

世界からお金が集まる
人民元高

人民元安へ
人民元売り

⑨ 中国発のリーマンショックは起こるか

民間経済主導の経済ではなく
政府主導の経済
中国は，日本と同様，外国資本に依存していない

購買力平価（国内のモノやサービスの購買力）でみると
中国はアメリカを抜いて第一位

（中国経済は国有企業
民間主導ではない

# (8) EUと現状と未来

① 経常黒字国のスウェーデン?
それでも賃金が上がらないのは何故?

延命措置はしない、意味がない

賃金が上がらない、上げられない事情、グローバル化
激しい競争。せめてはドイツ企と
少なくともドイツ企業より賃金は上げられない

中央銀行がインフレ目標を掲げるのは、
賃金を上昇させるためではないのに ——
— 物価上昇目標 2% —

一般的にインフレ率と賃金との関係は、(中小企業白書
2007-2017の10年)

$$\underset{0}{\underline{\text{インフレ率}}} = \underset{1\%}{\underline{\text{名目賃金の伸び率}}} - \underset{5\%}{\underline{\text{労働生産性の伸び率}}}$$

異次元緩和 2% 2% 5%
結局、名目賃金は上昇せず、労働生産性は5%伸び
ているのにインフレ率は0%ということは、何が問題か
インフレ率が △4% だったのか?

(9) ポピュリズム（大衆迎合主義）

感情的な大衆

世界的な政治事変

① イギリスのEU離脱

② トランプ大統領の誕生

大衆の不満 —— 彼等の支持を獲得

アメリカの製造業 —— 企業の海外移転、失業、低賃金

"製造業の復活、雇用の確保"……実現は難しいのに、

イギリスの難民制限 —— EU加盟ではそれができない

移民、難民に対する一般大衆の嫌悪

# ④ 東京五輪後の金融危機（不動産価格）

金融危機のパターン

(イ) ノンバンク中心の金融危機

ノンバンクが過度にリスクをとった場合

(ロ) 各国の中央銀行が出口政策を実行し実行に移した時期

2008年以後の大規模な金融緩和政策

中央銀行が市場から大量の資産を買入れ

これが資産価格の上昇をもたらし →バブル

(ハ) 不動産価格

今回の不動産価格上昇の要因は何であったのか。

異次元緩和 →市場に大量のマネー供給、金利低下

東京五輪への期待

(ニ) 不良債権処理のために、不動産価格には、

さらに下落圧力がかかる。

(ホ) 歴史 ― 不動産価格の底（10年毎）

2002年 ― 2012年 ― 2022年 ―

## (3) いよいよ始まる企業淘汰

### ① 現状の日本

供給力 ―― 需要力

バランス
=

設備の老朽化
生産能力の限界

衰えつつある需要

＞

$\boxed{\text{企業淘汰}}$

淘汰

高い生産性を持つ企業だけが残る

地域、個性が売りの生産性をもっていかないと

でなければ $\boxed{\text{淘汰}}$ される

沖縄企業の低生産性も、淘汰で解決できる

9ては ....

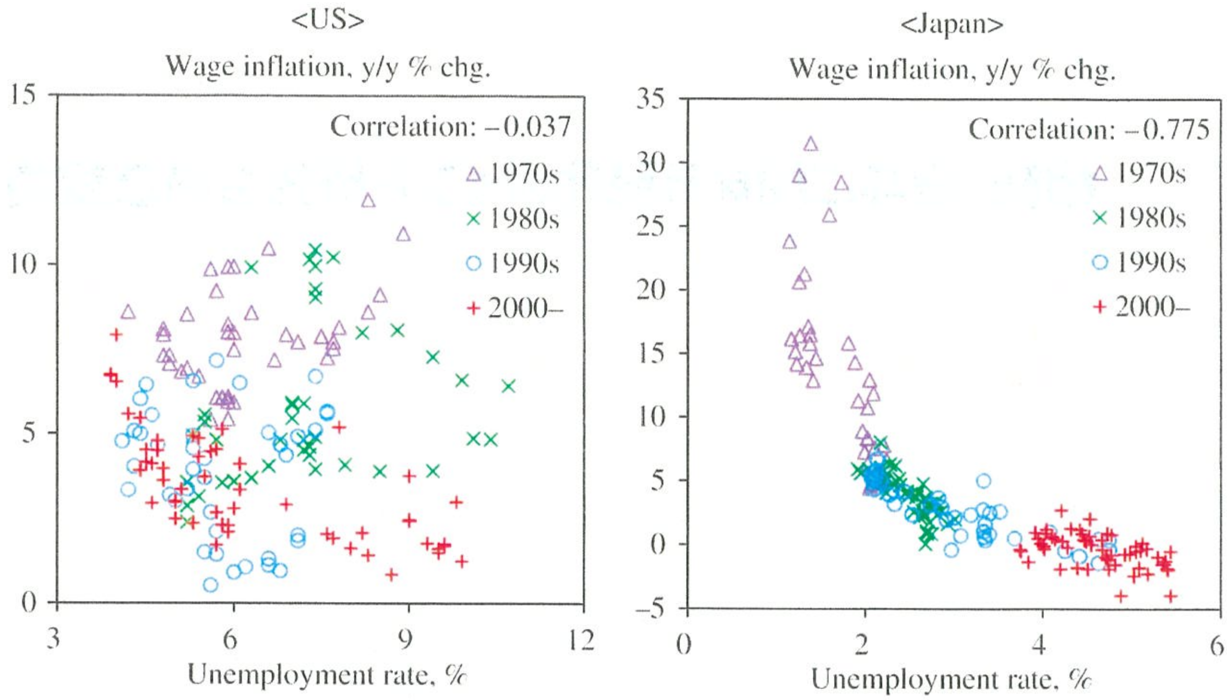
### ② シェアリングエコノミー

無理して買わなくてもいい

頑張ることもない

縮小する需要

# 「高圧経済」？




Muto and Shintani."An Empirical Study on the New Keynesian Wage Phillips Curve: Japan and the US" *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 2017.

# 中央銀行の非伝統的金融政策

目的

a. インフレ期待に働きかける

b. 金融機関のリスクテイクを促す

手段

1. マイナス金利
2. バランスシートの拡大
3. 長期国債の購入

中央銀行がインフレ目標を掲げるのは、貨幣を卑しくさせるのが目的。

インフレにはさせない

上智大 経済学部 竹田陽介教授レジメから

1

# 仮想通貨時代を生き抜くための
~~お金の教科書~~

慶応義塾大学教授
白井さゆり

2019.10.23
2019.10.28

1、2017.12 ビットコインの価格が 1ビットコイン 2300,000円の高値をつけた。
同年1月1日の価格は約115,000円だったので 1年で20倍にふくれあがった
しかし 2018.12 360,000円に下落

2、仮想通貨の優位性
(1) ブロックチェーンと呼ばれる非中央集権的な仕組み
（管理者不在の仕組）
(2) 暗号化技術を用いて取引を行うデジタル通貨
(3) 金融を大きく変えてゆく可能性
(4) 現代は、「仮想通貨時代へ突入した」と言える
(5) 本質と可能性をしっかりと理解した上で
これとうまく付き合っていく道を探る必要がある

3. 人々の信用や信頼に基づいた現代の通貨制度

不換紙幣（フィアットマネー）

4. 将来の「お金」にまつわる不安

お金の本質の理解

# Ⅰ、お金の歴史

## 1、世界最古の硬貨　エレクトロン貨

あらかじめ純度と重量を定める

BC650年頃　エーゲ海のイオニア（トル

金と銀の合金

ライオンなどの動物

## 2、お金の始まり

### (1) 物々交換からの脱却

お互の欲しいモノやサービスによる交換の成立

不便さの解消

共通の価値の尺度　11000～8000年前

最初は、家畜、穀物、毛皮、貝殻、布…

…　商品貨幣（コモディティ・マネー）

(2) 金属貨幣へ　一人類の経済史の最大のイノベーション一

古代メソポタミア　紀元前3000年頃

農業の発展　一他地域との交易

当時の交換手段 一 大麦、羊毛、油、金属 子安貝

取引を記録した楔形文字の粘土板

春秋・戦国　…クワやスキの形をした青銅貨

秦　---使い勝手のよい丸形でまん中に四角の穴の貨幣の形

(3) アレクサンダー大王の偉業

マケドニアのフィリッポス2世の後継者

アレキサンダー大王（3世、BS 336～323　14年間在位）

若干20歳で即位

BC 330年　アケメネス朝ペルシアを滅ぼす

征服地にギリシア人、マケドニア人を定住させるための都市アレキサンドリア

商口内の交易の振興のアッティカマネー（通貨）の鋳造（アテネ）と使用


アレキサンダーコイン（金貨）

テトラドラクマ（銀貨）（トラキア）

(4) 世界最古の紙幣「交子」中国「宋」

唐（618〜907）、の金属貨幣

宋（960−1279）　金銅貨　交子（紙幣）四川省

金銅の不足 → 鉄貨（重くて不便 → 紙幣の発行）

交子（紙幣）には、硬貨や塩を担保として価値の保証

― 兌換紙幣

不換紙幣は金属との交換が保証されていない

「信用」「信頼」に基づくフィアットマネー

「交子」は、西夏との戦費をまかなうため世界最初の法貨となる

次第に兌換停止の「不換紙幣」へと変容

元（1271−1368）、明（1368〜1644）時代

政府が発行する紙幣が唯一の法定通貨（不換紙幣）

(5) スウェーデン・ストックホルム

17C　世界初の銀行券の発行（兌換紙幣）

(6) 金本位制の確立　　1816年イギリス

近代ヨーロッパ

本位貨幣　金貨の発行

自国通貨一単位の価値が、その貨幣に含まれる

一定量の金や銀と結びつく貨幣のこと「正貨」

## (7) 日本におけるお金の歴史

日本で最初の金属貨幣は「富本銭」か

元明女帝 慶雲5年（708）和銅と改元し

唐銭 開元通宝をまねた「和銅開珎」を鋳

しかし、天武天皇12年（683）頃の「富本銭」があった。

## (8) 日本最初の紙幣「山田羽書（ハガキ）」伊勢山田地方

近世初頭（16～17C）

元々は丁銀の預り証

紙幣は金属貨幣の重さの不便さの改善

## (9) 江戸時代に発展した通貨制度

家康は、全国の金銀山を自分の手中に納めて行った

(10) 米を介在させた日本独得の通貨制度

並列（ 米本位制 (税物)
金銀銅本位制

ユニークなもの

年貢米 → マネー(通貨)換金 → 人件費その他の予算

→幕の赤字経済 ― 大商人からの借入れ ―

江戸経済　米価 ―― 一定

江戸のモノ、サービスの転引 ― 価格上昇

↓ 換金しやすい 商品作物生産

↓ 幕財政の圧迫

江戸 ― 各地からの輸入　江戸の消費

大阪 ― 各地の物資が集まり → 江戸へ輸出

札差 ― 税物(米)支給された旗本や御家人から
米を買上げて換金する

(11) シニョレッジ（通貨発行益）

幕府は、金銀銅本位制の下、「貨幣の改鋳」によって収益（シニョレッジ）を得ることができた。

各地の大名は、藩札を発行したり、大商人から借入れを行ない財政の維持に努めていた。

(12) 幕府の貨幣制度

金座　日本橋本石町 外
銀座　伏見
銭座　寛永通宝

幕府の通貨発行権の3分化
三貨制度

(13) 藩札の流通

(8) 貨幣の改鋳

日本は金の産出国として有名

マルコ・ポーロ　黄金の国

16C〜17C　日本の金の産出量は世界の3分の1

銀、銅に関しては世界一の産出量を誇った時期もある

金銀銅の産出量が上昇　1600年代まで

この当時一般物価の価格が上昇

貨幣価値が低下 —— インフレ

17世紀の国際貿易で輸入の増加に伴い膨大な量の銀貨が海外へ流出

1680年代の貨幣不足

マネーの価値は上がり、逆に物価は下落

貨幣量の不足によるデフレ

↓

貨幣量の増加によりインフレを図る

（金融緩和政策）

「貨幣の改鋳」はなぜ行われたか？

の章を読んで「異次元の緩和」の意味が少し分かりました。

日本では

江戸時代、金銀銅の豊富な金属資源を背景に
1600年代までは、一般物価の価格が上昇する
（つまり通貨価値が低下する）「インフレ」状態が続いていた。

ところが、それ以降は、金銀の産出量が伸び悩み
「マネー（通貨）」の供給量の伸びが鈍化してゆく。
1680年代になると貨幣不足は深刻となり、
「マネー（通貨）」の価値は上がり、逆に物価は下落してゆく。
「マネー（通貨）」が不足すると、大都市江戸では全国各地のモノの
買入れ（輸入）に対する支払が難しくなり、江戸の経済活動は
停滞してデフレが発生した。

こうした事態を切り抜けるために幕府が行ったのが「改鋳」だった
金の含有量を減らし、貨幣発行量を増やしてインフレを起こそうとした。

江戸時代の貨幣の改鋳は、「マネー（通貨）」の供給量を増やすための、
「金融緩和政策」だったと言えます。 これによって経済を活性化させようとしたのです。

江戸時代における貨幣の改鋳（印象とは違うものがある）

綱吉時代の元禄8年（1695）「元禄の改鋳」

勘定奉行吟味役 荻原重秀が主導

貨幣の流通量は、最大で8割ほど増えるもデフレ圧力は和らぐ

↓

荻原のそれに、宝永通宝、永字銀などの改鋳、新型発行は、莫大な出目（改鋳益）を稼ぐとともに、
貨幣の供給が需要を超え、貨幣の過剰供給を招き、
ついにインフレを発生させてしまう。 1712 失脚

荻原の後を継いだ新井白石は、方針を転換し、通貨の金銀含有量を元に戻す。しかし、これによって貨幣供給量は減少し、深刻なデフレを招く

このデフレの解消は、吉宗による「元文の改鋳」であった。

天保の水野忠邦の改革は失敗し幕府の財政再建は失敗する

黒船来航後は防衛に多額の費用がつぎこまれる

この時期、幕府は「御用金」で財政不足を補おうとするが、
石高が大きく幕府の威光も低下する中、新政府が樹立される

# (15) 重要的な魅力を持つ貨幣改鋳

最初の改鋳 綱吉 元禄8年 1695年「元禄の改鋳」

柳沢吉保、荻原重秀

金含有率 84% → 57%

(慶長小判) (元禄小判)

↓

荻原は独断で 経済活動が活性化

宝永通宝、永字銀、三ツ宝銀、元禄文化

四ツ宝銀、乾字金 などを発行

その結果 貨幣量 > 物 となり ついにインフレを発生させる

宝永の大地震、富士山噴火 … 物価の高騰に拍車がかかる

荻原は、政敵である新井白石に非難され失脚

新井白石は、金銀の含有量を元に戻す

このことにより、貨幣供給量は極度に減少し、深刻な

デフレを引き起こす

このデフレを解消したのが 吉宗による元文の改鋳

低インフレと高成長の実現

天保の改革の失敗と幕府財政の破綻

水野忠邦の行った金貨改鋳や年貢の増収

貨幣が極端に抑制され デフレとなる

現代貨幣理論

財政問題

現在　MMT/FTPL

不完全

不確実性がある

貨幣の歴史を読んで

[illegible]

2019.08.26
2019.08.05
2019.06.24
2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

# 積　分　の　定　石

## （変化する量を集めて形にする）

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。（微分と積分なるほどゼミナール　S58.1 岡部恒治著　日本実業出版社刊）
（微積分のはなし　1985.3 大村平著　日科技連刊）（Excel で学ぶ微分積分 H24.8 山本将史著オーム社）
（イラスト図解微分・積分　2009.6 深川和久著　日東書院刊）（微積分を知らずに経営を語るな PHP選書）
（Excel でやさしく学ぶ微分積分　室　淳子著 2006 東京図書）　内山力著

2019.10.07
2019.10.14
2019.10.28

# Ⅰ　身近な積分

## 1．積分の歴史

⑴ 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。（どうやって全体の面積を把握するか）

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

社会科学
自然科学　} ⟶ グラフに描く ⟶ 機何学の問題になる

積分→結果どうなったか、小さな変化をどのように形とするか
小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ねるとどうなったかとその結果
曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
変化する様子、変化する量をどうやって集めるか

変化する量はどんなになるのか

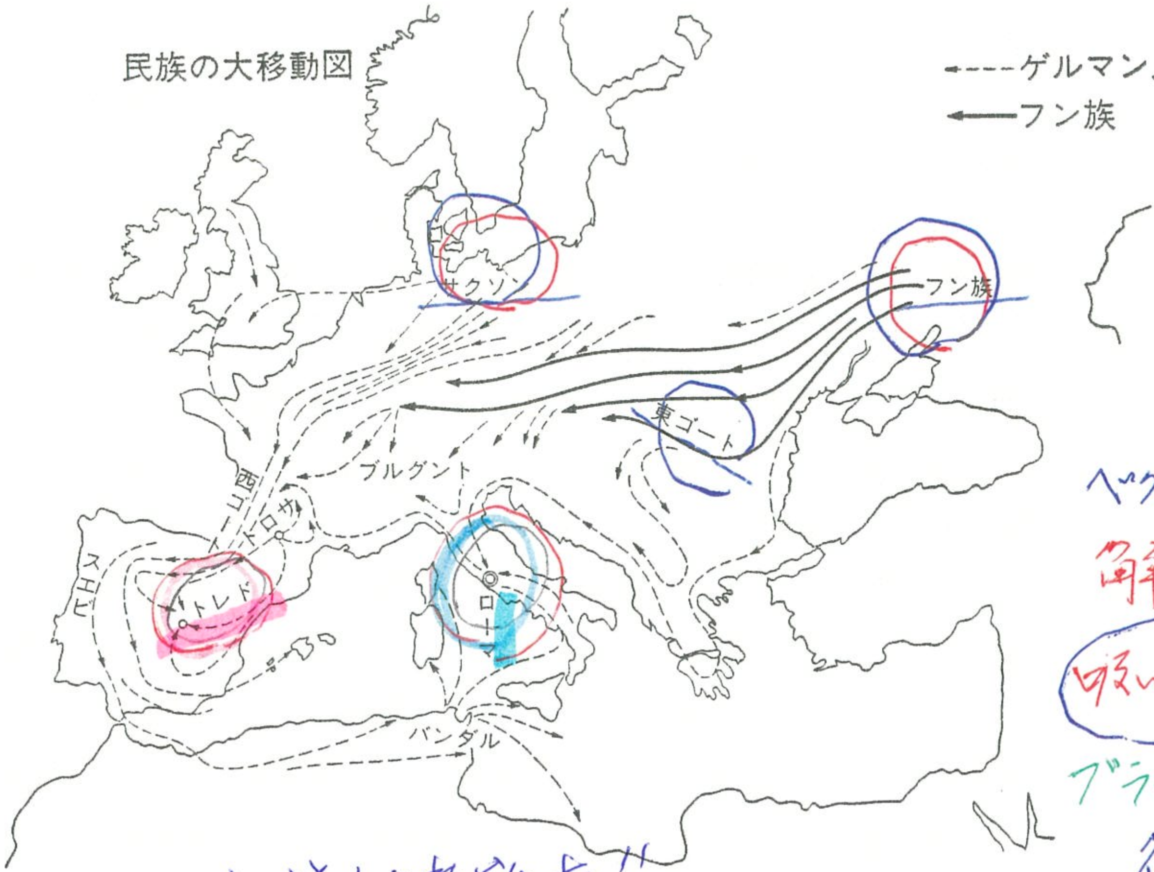
∫ →インテグラルが付くと積分することを表す（　〃　）

∫ 小さいものを集める!!

S(SUM)のこと、整数は Σ　それに小さいものを

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

## ★なるほどゼミナール



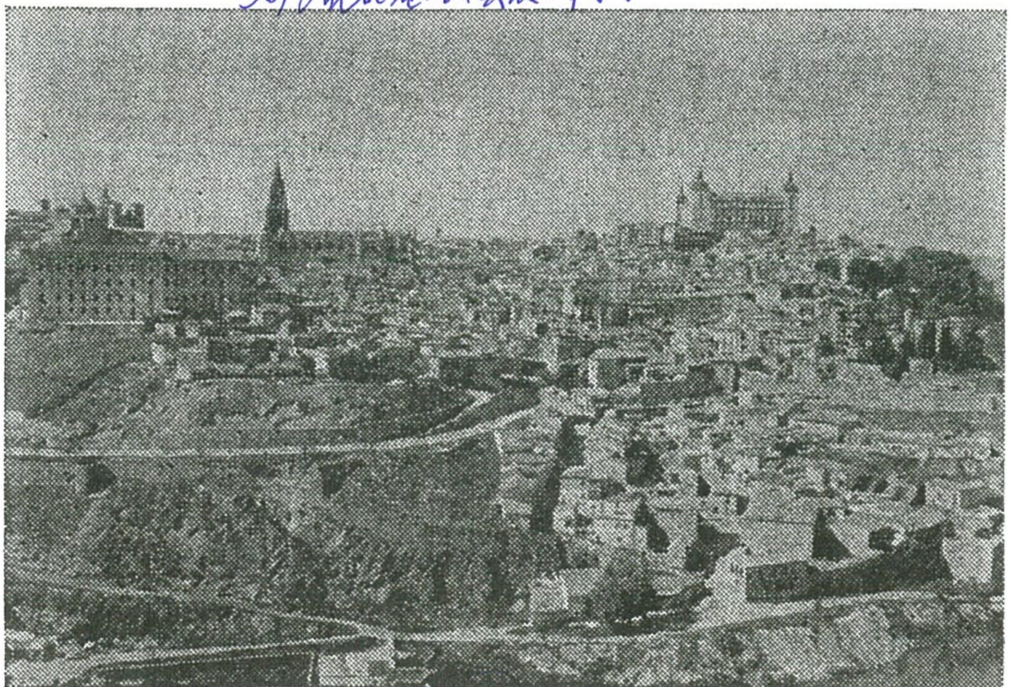

ベクトル場
解曲点
吸い口み点
ブラックホール

この流れを数式化する!!

微分方程式

民族の大移動の計算

この流れを微分方程式に入れる!!



●昔の名残を今に留めるトレド

AD 375年に始まるゲルマン民族の大移動

トレド、ローマ

## ゲルマン民族大移動

三七五年に始まるとされるゲルマン民族の大移動。これは東のほうからフン族（蒙古系といわれる）が今のハンガリー周辺の東ゴート族の領土に侵入したことから始まりました。現在、ハンガリー人がモンゴル系である理由もそこにあります。

ところで、フン族の大移動はヨーロッパに住んでいたゲルマン民族の諸族に次々に波及し、次ページの図のようにドミノ・ゲームの様相を見せたのです。

これら諸族の移動状態の概要図を見ると、あたかもベクトル場を見ている錯覚に陥ります。すなわち、微分方程式として考えることもできるわけです。

微分方程式は台風の進路の予測にも使われました。人間の支配の及ばない自然現象の解明の一助になっていることがわかったと思います。

そしてゲルマン民族の大移動のように、人間行動についてもさまざまな考察をすることができるのです。たとえばベクトル場を考えるさいに無風地点とか不動点というものを考えましたが、その発展したものに吸い込み点があります。ブラックホールのようなものです。

次ページの図にも吸い込み点が見つかるでしょう。今のマドリードのすぐ南（トレド）とローマの二点です。このことから、いろいろな部族が集結したために「さまざまな文化が集散したのではないか」と推測できます。

事実、刀剣をはじめとした武器製造や、金細工、羊毛工業が活発となったトレドは一一世紀から一六世紀にかけてはスペインの首都として栄えています。もちろん、トレドは紀元前からあった古い街ですが、民族大移動の吸い込み点となり、各地の文化が集中したことも見逃せない事実ではないでしょうか。

（定積分の定義）

関数 $y=f(x)$ の不定積分を $\int f(x)dx = F(x)+C$ とし，

$a, b$ を $f(x)$ の定義域の任意の値とするとき、

点 $b$ での不定積分の値と、点 $a$ での不定積分の値との差は

$$\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となり，$C$ の値に関係なく、$a, b$ の値だけで決まる。

この $F(b)-F(a)$ を、

$\int_a^b f(x)dx$ または $\left[F(x)\right]_a^b$ と書く。

これを、関数 $f(x)$ の定積分といい、

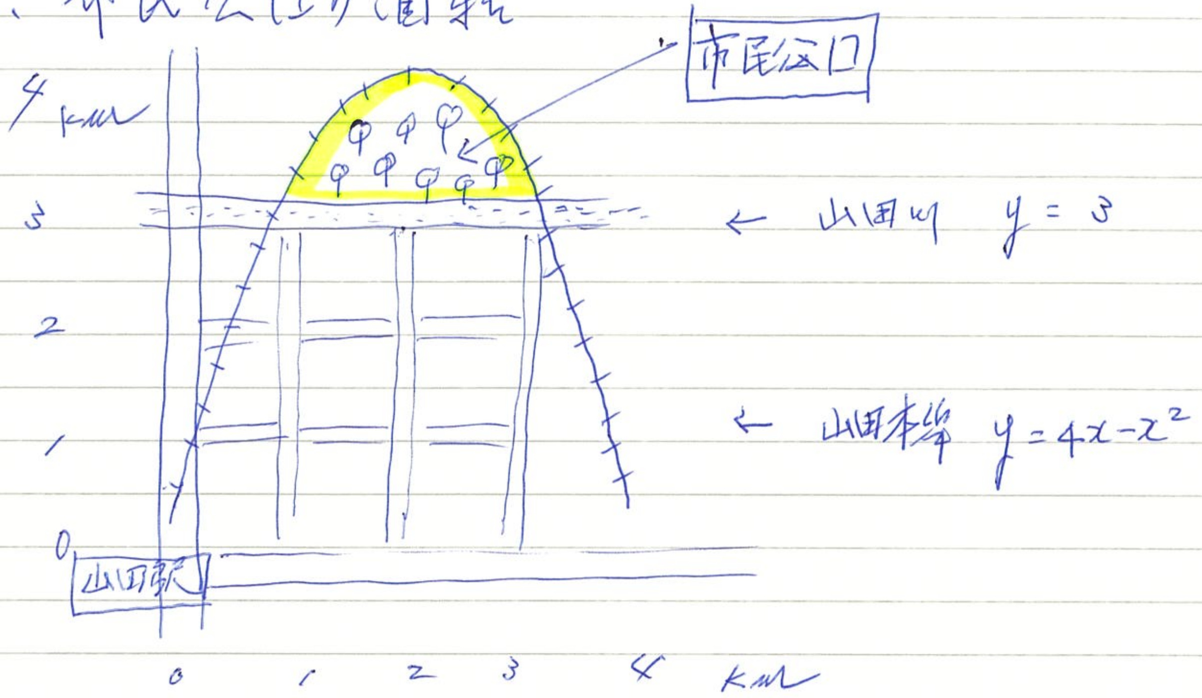
$a$ を下端，$b$ を上端という

この定積分を求めることを、関数 $f(x)$ を $a$ から $b$ まで積分するという

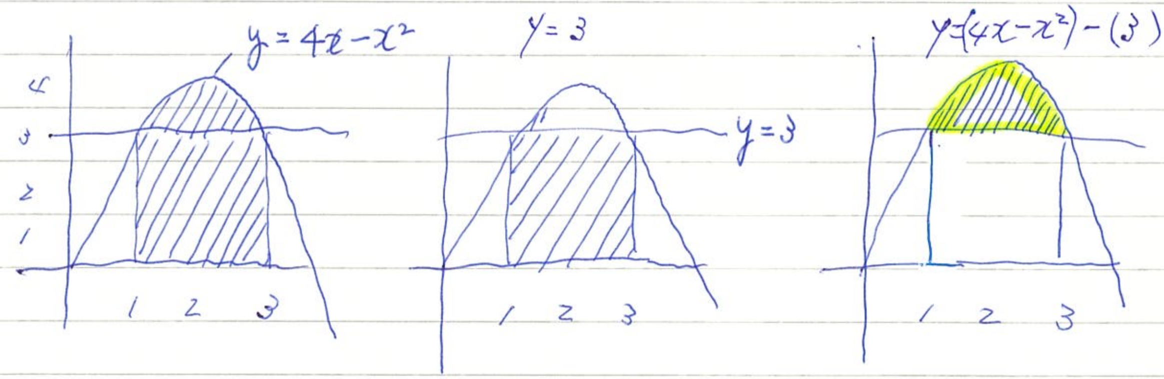
正



## 5. 市民公園の面積




Ⓐ − Ⓑ = Ⓒ




$$\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = \left[\frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

$$\int_1^3 3\,dx = \Big[3x\Big]_1^3 = (3\times 3) - (3\times 1) = 6$$

2つに分けて計算した後、計算する。

$$\frac{22}{3} - 6 = \frac{4}{3}\ (\mathrm{km}^2)$$

■定積分と面積

# 曲線で囲まれた図形の面積を求めよう

## ◇リーマン和

前述のように、積分は面積を求めるために考えられたものである。では、なぜ定積分が面積を表すのかをみていこう。

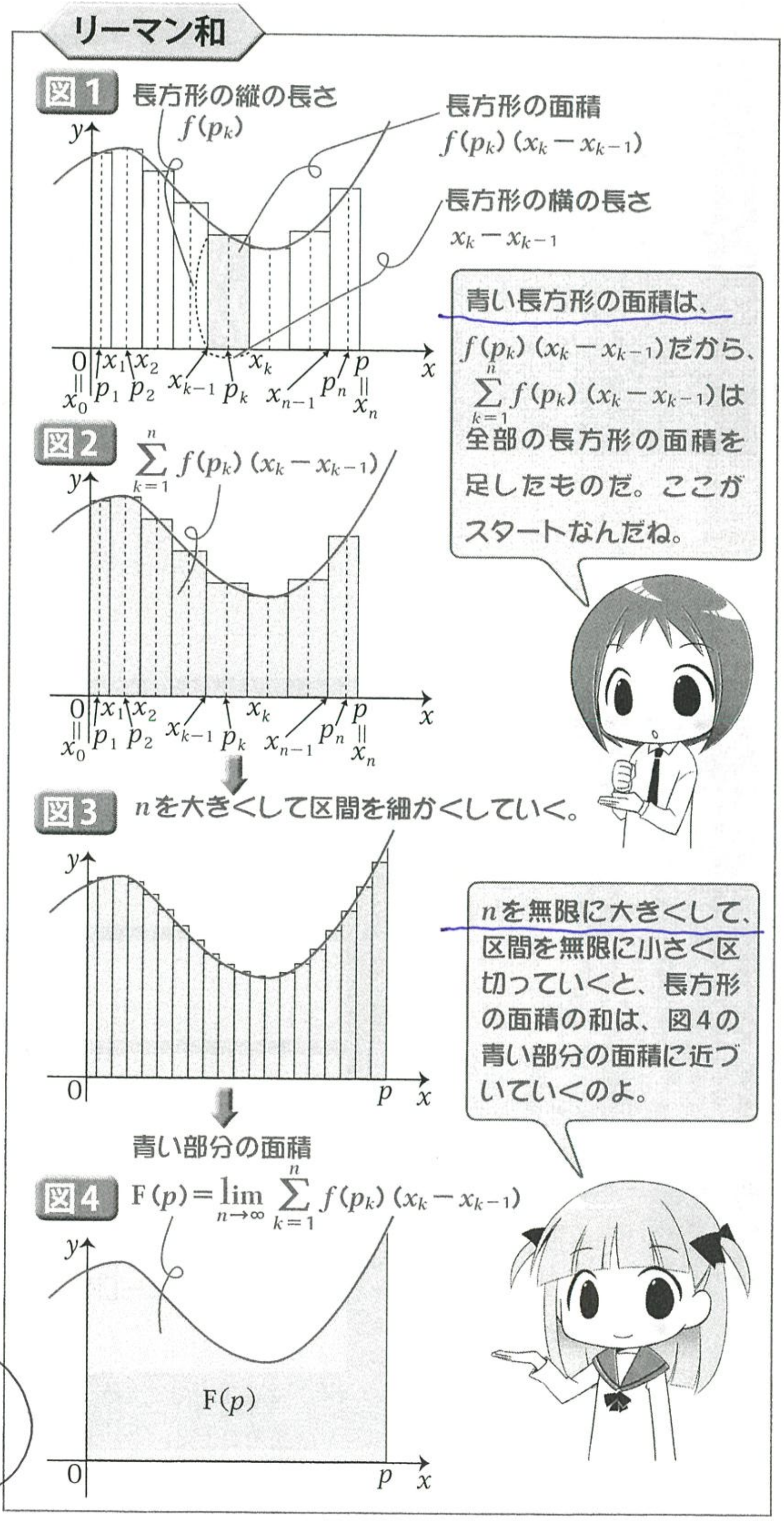
区間$0 \leqq x \leqq p$に、$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = p$となるように、点$x_k$（$k = 0$、1、2、…、$n$）をとり、$n$個の区間$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$（$k = 1$、2、…、$n$）から点$p_k$を1つずつとる。

区間$0 \leqq x \leqq p$で$f(x) \geqq 0$である曲線$y = f(x)$に対して、

$$\sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$= f(p_1)(x_1 - x_0)$$
$$+ f(p_2)(x_2 - x_1)$$
$$+ \cdots$$
$$+ f(p_n)(x_n - x_{n-1}) \quad \cdots①$$

という和を考えよう。これをリーマン和という。

ここで、$n$を限りなく大きくし、各区間の幅$x_k - x_{k-1}$が0に近づくようにすると、①はある一定の値$\mathrm{F}(p)$に近づく。この値$\mathrm{F}(p)$は、曲線$y = f(x)$、$x$軸、$x = 0$、$x = p$で囲まれた図形の面積である。



そこで、図5のように、区間$a \leqq x \leqq b$で$f(x) \geqq 0$である曲線$y=f(x)$に対して、この曲線と3つの直線$x=a$、$x=b$、$x$軸で囲まれる図形の面積をSとすると、

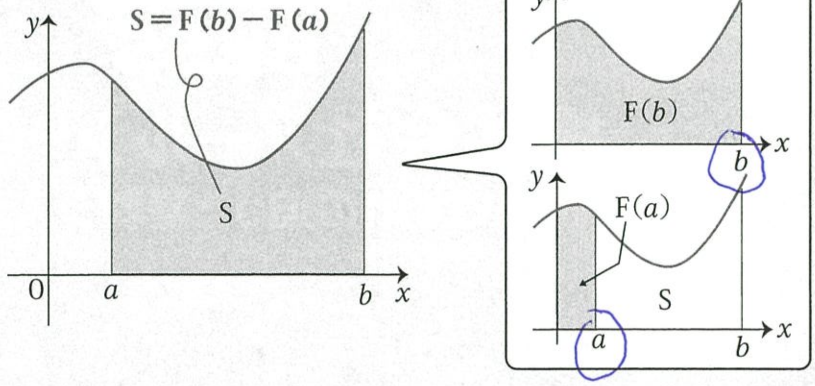
$$\mathrm{S}=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \quad \cdots ②$$

が成り立つ。

**直線で区切られた図形の面積**

3つの直線$x=a$、$x=b$、$x$軸で囲まれる図形の面積は、0から$b$までの面積$\mathrm{F}(b)$から、0から$a$までの面積$\mathrm{F}(a)$を引けばいいのよ。

図5




## ◆F(x)の微分を考えよう

つぎに、$p$を$x$に置き換えて、関数$y=\mathrm{F}(x)$を考え、$\mathrm{F}'(x)=f(x)$が成り立つことを示す。図6のように、$x$から$x+h$の間の長方形ABCDと長方形ABEFを考える。

❶各部分の面積の大小を比較する。

長方形ABEFの面積＜青い部分の面積＜長方形ABCDの面積

❷各部分の面積を式で表す。

長方形ABEFの面積＝$f(x)h$

長方形ABCDの面積＝$f(x+h)h$

青い部分の面積＝$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)$

❸大小の比較に式を入れる。

$$f(x)h<\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)<f(x+h)h$$

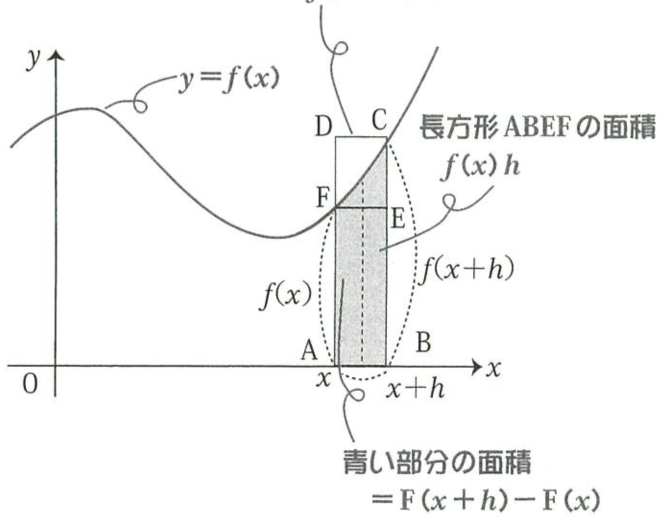
❹各辺を$h$で割る。

$$f(x)<\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}<f(x+h)$$

❺$h$を0に近づける。

$$f(x) \leqq \lim_{h \to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} \leqq f(x)$$

図6



# Ⅲ、面積と体積を求める　F

## 1、関数に囲まれた面積

(1) ①と②に囲まれた面積Sは、

$f(x)=x^2$ ―①　　$g(x)=-x^2+2x+4$ ―②

$f(x)$の頂点は $\begin{cases} f'(x)=2x \\ x=0 \\ (0,0) \end{cases}$

②を微分すると $g'(x)=-2x+2$

頂点は、$g'(x)=0$ とおいて、$0=-2x+2$、$x=1$ である。

そこで、$g(x)$に $x=1$ を代入して　$g(1)=-1+2+4=5$ で

$g(x)$の頂点は　$(1,5)$ となる。

グラフ①と②の交点は、$f(x)=g(x)$ を解くと、

$x^2=-x^2+2x+4 \longrightarrow 2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)=2(x+1)(x-2)=0$

よって、①と②は $-1$, $2$ で交わる

すなわち、$x$方向は、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲となる

$y$方向（タテ）の長さを $h(x)$ とすると、

グラフより、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x) \leqq g(x)$ なので

$h(x)=g(x)-f(x)=-x^2+2x+4-x^2=-2x^2+2x+4$

すなわち、$y$方向（タテ）の高さは、$-2x^2+2x+4$ となる。

これを定積分すると、

$x$の範囲（ヨコ）と$y$の方向の高さ（タテ）の関数がわかったので

$$S=\int_{-1}^{2} h(x)\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{2\times 2^3}{3}+2^2+4\times 2\right)-\left(\frac{-2\times(-1)^3}{3}+(-1)^2+(4\times -1)\right)$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9$$

## 2. 関数に囲まれた体積

積分は面積を求めるばかりでなく、
かけ算をして意味がある全体量ならば、
$x$の範囲がわかって、$y$が関数で表わされれば、定積分が使える。


(1) 例えば、曲がってはいるが、どこを切っても断面積が8になる
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　m²
長さ10の管の体積 $V_1$は、　　高さ 面積
　　　m
長さの方向を$x$方向とし、断面積を積み重ねて体積を求めると、

$$V_1=\int_0^{10} 8\,dx = \Big[\,8x\,\Big]_0^{10} = 80\ (m^3)$$

$8\,(m^2) \times 10\,(m) = \underline{80\ m^3}$

面積　　長さ・幅

(2) 次に、形はわからない物体の体積 $V_2$は、

方向の長さが5で、断面積$S$は$3x^2+10$とすると、

$$V_2=\int_0^5 (3x^2+10)\,dx = \Big[\,x^3+10x\,\Big]_0^5 = 175$$

幅 $x$

$(3x^2+10)\ \underline{m^2} \times dx\ \underline{m}$

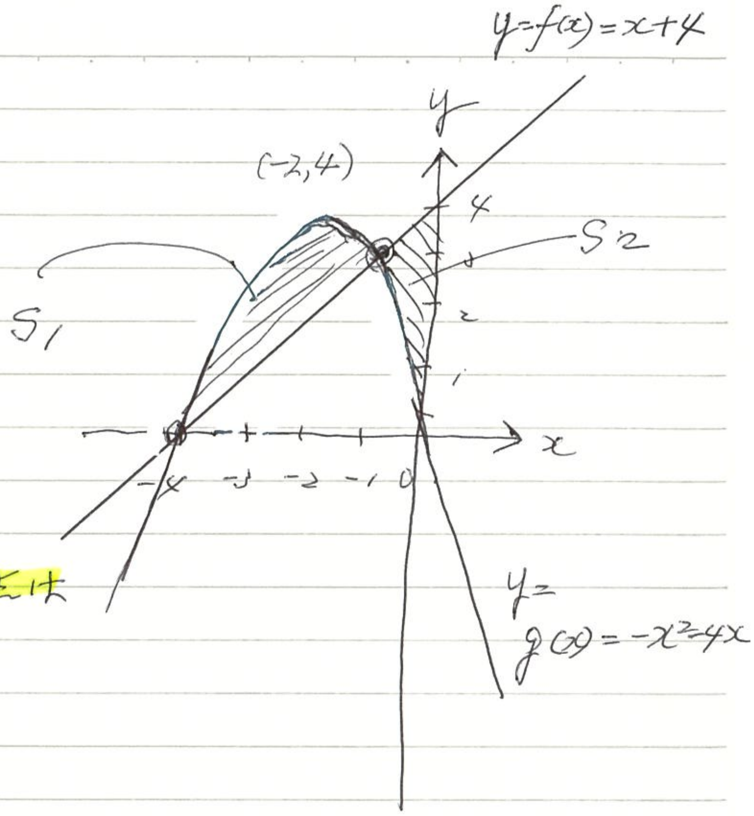
面積・高さ $y$

$\frac{3}{3}x^3+10x = (5)^3+10(5) = \underline{175\ m^3}$

# 交差する関数に囲まれた面積

$f(x) = x+4$

$g(x) = -x^2-4x$




(1) グラフを描く、頂点を求める

$f(x) = x+4$

$g'(x) = -2x-4 \rightarrow x=-2$

$x=-2$のとき $g'(-2)=0$で、

$g(-2)=4$ なので $g(x)$の頂点は

$(-2, 4)$

(2) 交点を求める

$f(x)=g(x)$の 2次方程式を解くと

$x+4=-x^2-4x \rightarrow x^2+5x+4=0 \longrightarrow (x+1)(x+4)=0$

よって $x=-4, -1$ で、交点は $x=-4 \rightarrow y=-4+4=0$ $(-4,0)$

$x=-1 \rightarrow y=-1+4=3$ $(-1,3)$

(3) $y$方向の長さを求める

グラフより $S_1$ の $-4 \leqq x \leqq -1$ で、$f(x) \leqq g(x)$

$S_2$の $-1 \leqq x \leqq 0$ で、$f(x) \geqq g(x)$

(4) 定積分

?

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} \{g(x)-f(x)\}dx = \int_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)dx = -\int_{-4}^{-1}(x+1)(x+4)dx$$

$$= \frac{1}{6}(-1+4)^3 = \frac{9}{2}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} \{f(x)-g(x)\}dx = \int_{-1}^{0}(x^2+5x+4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}(x^2)+4x\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right) = \frac{11}{6}$$

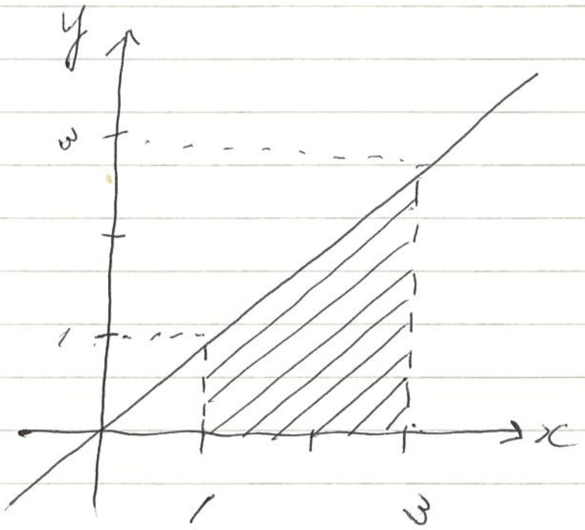
正



No.

# 定積分で面積を求める (グラフに囲まれた面積を求め

## $y = x$ の定積分



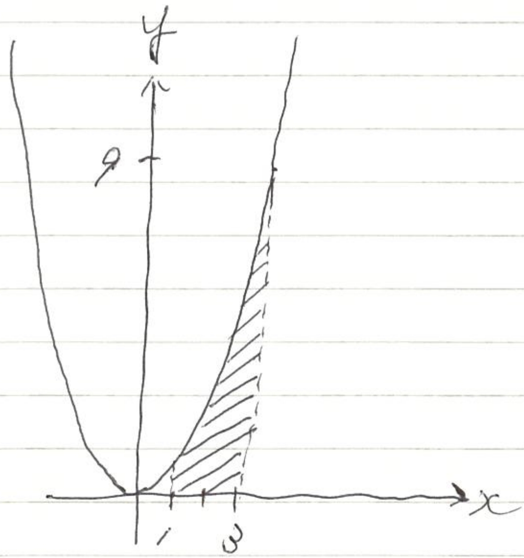

1から3の範囲で定積分する

$y=x$ 高さ　　微小$dx$ 長さ

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

## $y = x^2$ の定積分




1から3の範囲で定積分する

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

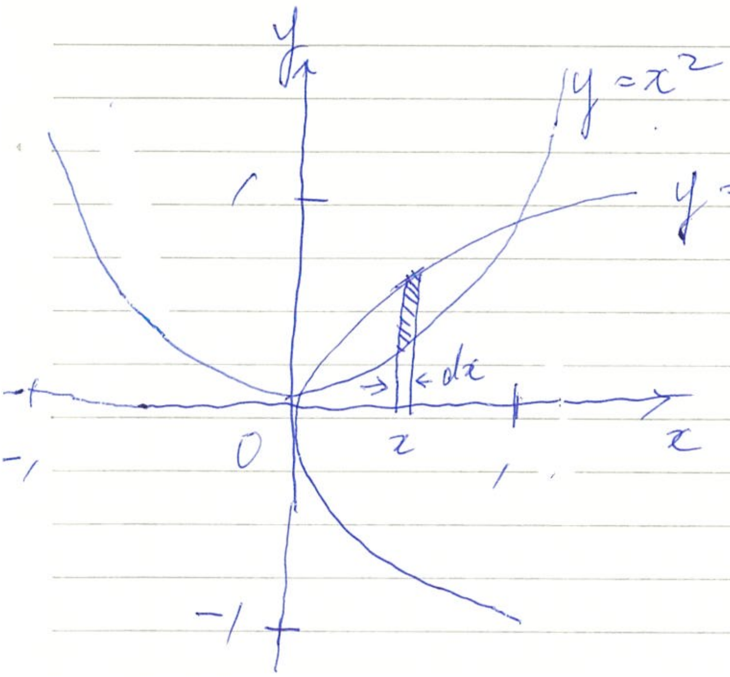
$$= \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

PLUS

(1) 自然現象
社会現象 の表現　$y=f(x)$

(2) 〃　の変化　$y'=f'(x)$

(3) $f(x)$とx軸で
はさまれた面積　$S=\int_a^b f(x)\,dx$
自然現象の結果、姿




高さ

図形の縦方向の長さ

$y=\pm\sqrt{x}$

$y=x^2$

$\sqrt{x}-x^2$

横幅　$dx$

面積 $dS=(\sqrt{x}-x^2)\,dx$

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-x^2)\,dx$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

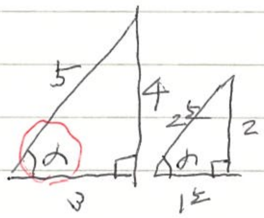
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

H28.9.19
H28.1.5
三角関数（ズバリ図解）
深川和久監修　2007.11. ぶんか社
関数のはなし（上・下）大村平著
H26.09.01　日科技連刊
H27.8.31　2019.01.28
H27.01.19　2019.05.13
H27.04.20　2019.07.16
H27.10.01　2019.10.21
2019.10.28

# 三角関数

## Ⅰ 三角比

1、三角比とは、角度αがある角度だったときの辺の比

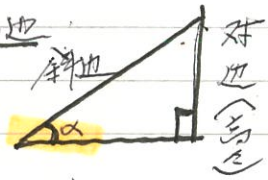



角αが同じ直角三角形は、相似の関係になり、辺の比も同じになる。

3：4：5

2、直角三角形の辺の名前

斜辺
直角に向かいあう辺




対辺（高さ）
角αに向かいあう辺

隣辺（底辺）

角αと接していて斜辺でない方の辺

3、タンジェントの表し方　　tangent＝対辺÷隣辺

$$\tan\alpha = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} \quad \frac{(\text{高さ})}{(\text{底辺})}$$

タレスの方法　　直角三角形の対辺がピラミッドの高さ
隣辺が影の長さ

2019.05.13

No. 7

# 三角関数

角度（…360度）を長さ（ラジアン）で表わす

## Ⅱ、三角比から三角関数へ

1 $2\pi$ ラジアン 6.2831853…

### 1、円周率 $\pi$ 3.141592……

角度

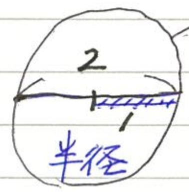
ラジアンは弧の長さ

（半周）$\pi$ 3.141592

$2\pi$（1周） 6.283185307

円周の長さと円の直径の比

半（直）径が1の円は、円周の長さが 6.283185（3.141592）となる 直径が2




円周の長さ $= 2\pi r$（半径 $r$）

1周の長さ $2\pi r$ ラジアン

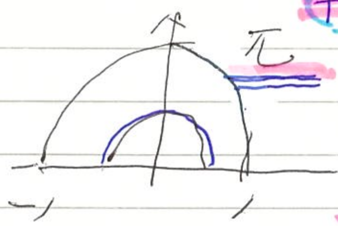
半径が1の円は、

半周 $1\pi$ ラジアン $= 3.1415$ ラジアン

### 2、ラジアン

単位円は、半径1の円であり、直径は2なので、単位円の円周の長さは $2\pi$ となる $2\pi$ ラジアン

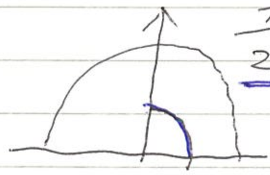
半周



$\pi$ 180度 $1\pi$ ラジアン

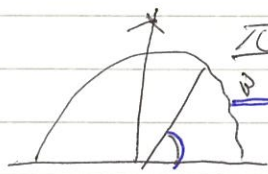
角度の大きさを弧の長さで表わす

ラジアンでは、度数法の360度が $2\pi$ rad となる。



$\frac{\pi}{2}$ 90度

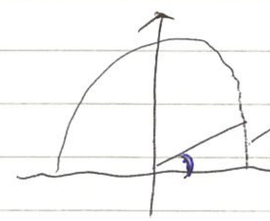
$180度 = \pi\,rad$、$90度 = \frac{\pi}{2}rad$、



$\frac{\pi}{3}$ 60度

$60度 = \frac{\pi}{3}rad$、$30度 = \frac{\pi}{6}rad$

$\frac{\pi}{180}$ を掛けると、度数法を（角度）ラジアンに変更できる（長さ）



$\frac{\pi}{6}$ 30度

$\frac{3.1415\cdots}{180} \fallingdotseq 0.01745\cdots$

半径 $r$

半周 $\pi$ ラジアン 3.14

直径 $2r$

1周 $2\pi$ ラジアン 6.28

## 微分の定義

$$\frac{(y\text{の変化量})}{(x\text{の変化量})} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

aのかわりに 変数らしい文字を使って

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

導関数　微分するとは、導関数を求めること

y = $x^2$ を微分すると

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

hは限りなく0に近づくので $y=x^2$ は $y=2x$ となる

このことを $(x^n)' = nx^{n-1}$ とも書く。 $y' = nx^{n-1}$

# $y = \sin x$ の微分

導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ より

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

この分子に次の差から積への公式をあてはめる

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)\sin\left(\frac{1}{2}h\right)$$ となる

よって $y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h}$$

ここで $h$ を0に近づけると、$\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)$ は $\cos x$ に近づき、

$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h}$ は、1に近づくことがわかる。

従って、$y' = \cos x$ となる。つまり、$y = \sin x$ を微分すると、

$y' = \cos x$ になる

# 7 べき級数

(1) べき級数とは、

関数 $f(x)$ を定数と $x^1$ から $x^n$ までの足し合せに展開した多項式である。

「べき」― 1乗、2乗 ……のことを指す

(2) 三角関数をべき級数に展開する公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

(3) べき級展開

関数 $f(x)$ の値 ＝ $x^n$ の項を足し合せた和

(4) サインは奇数の階乗

$\sin x$ をべき級数展開の公式に代入すると、

$$\sin x = \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

となる

① $\frac{\sin'(0)}{1!}x$ は、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ となるため

$\frac{\cos(0)}{1!}x$ となる。また $\cos(0)$ の値は1なので、$\frac{1}{1}x = x$ となる

② $\frac{\sin''(0)}{2!}x^2$ の場合は、$\sin x$ を2度微分すると $(\sin x)'' = (\cos x)'$

$= -\sin x$ となり、$\frac{-\sin(0)}{2!}x^2$ となり $-\sin(0)$ の値は0なので0となる

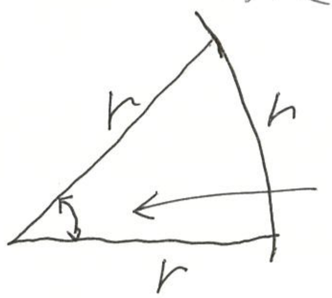
従って $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$ と奇数の階乗となる

# 角度の測り方

(1) 度数法　一回転を360°　度数で表わす

(2) 弧度法　ラジアン　一回転を2πラジアン　長さで表わす

弧の長さが半径(r)に等しい扇形があるとする。
そのときの中心角を1(ラジアン)の角度(長さ)と定めたのが
弧度法である。 ~~90度~~ 57度



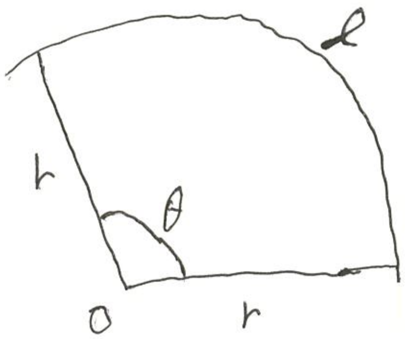

1ラジアンと定めた

1ラジアン (≒57.3°)

$\frac{\pi}{180} \fallingdotseq \frac{3.1415\cdots}{180} \fallingdotseq 0.01745\cdots$

こうすると、扇形の弧の長さは、半径rと円周角θの積(rθ)
という単純な式で表わすことができる。

円の半径をrとすると、円周の長さは、2πrという
公式で求めることができる。




半径　$r$

弧の長さ　$l$

円周角　$\theta$ (弧度法)

$$l = r\theta$$

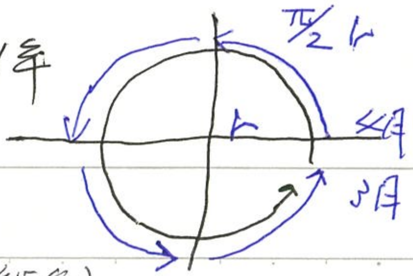
結局、角度はπを使って2πラジアンと表わすことができる

$r\theta = 2\pi r \rightarrow \cancel{r}\theta = 2\pi \cancel{r}$

つまり、度数法の360°は、弧度法の2π

企業の1年

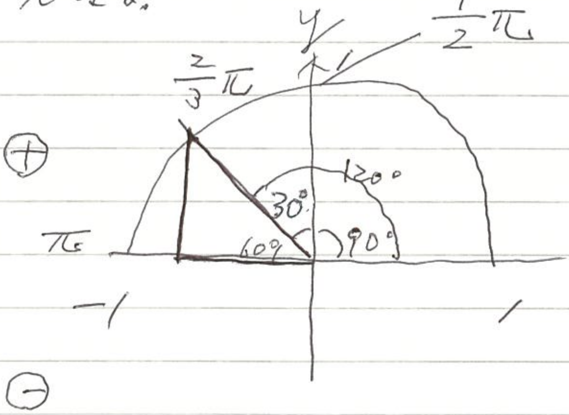
2π人の成果



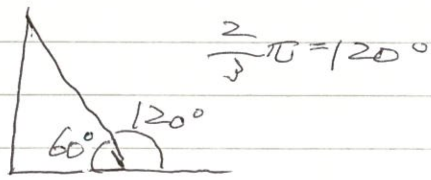

3、90度より大きいサインの値（一般角）

図形から定義した三角比では、$\frac{\pi}{2}$(90度)より大きな角度は考えられなかった。

しかし、x軸からの回転による一般角の場合は、x軸から$\frac{\pi}{2}$(90度)以上回転させても、単位円の中に直角三角形を作ることができ、sin や cos の値を考えることができる。




sin 120°の三角形




4、関数とは数と数の関係
対応

波、周期波

サインは周期のある周期関数

サインカーブ　2πの周期をもつ、値は1と−1を超えない

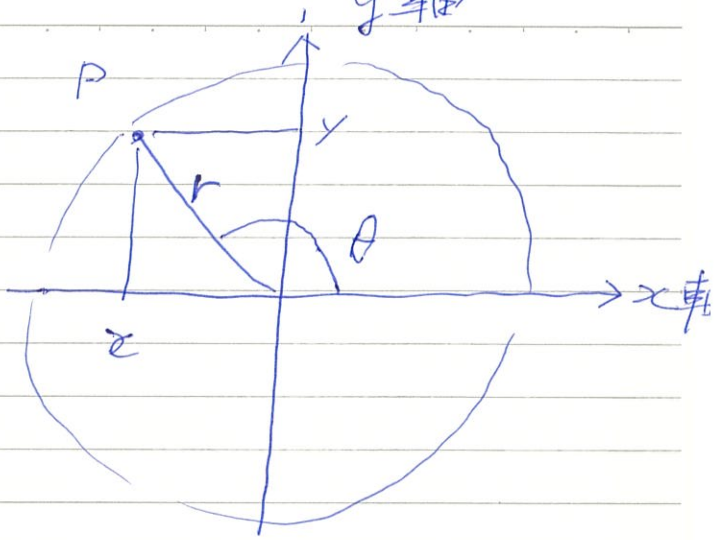
コサインのグラフもサインと同じ2πを周期に持つ周期関数

サインカーブを$\frac{\pi}{2}$だけ横に移動したもの

sin xに2を掛けると、波の幅を2倍に広げることができる　$y = 2\sin x$

# 極座標

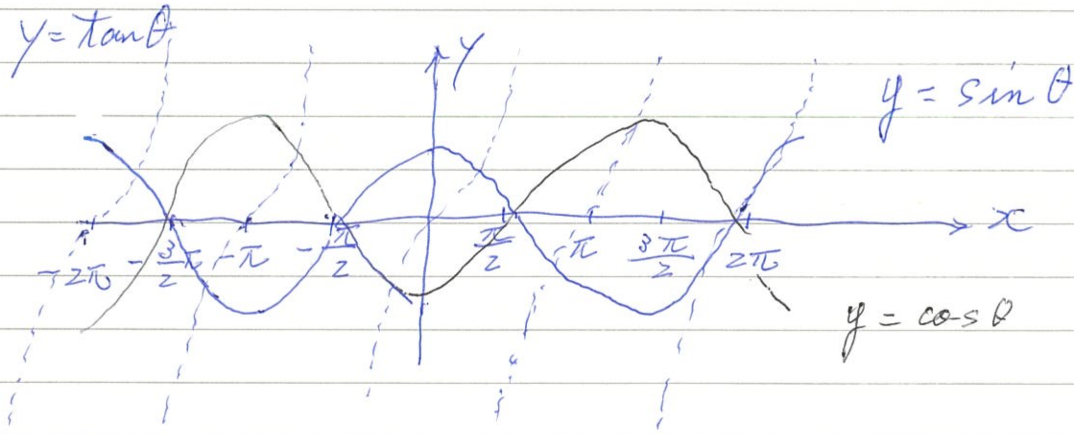
原点から点Pまでの
長さrと、基準線
(x軸)のなす角度θ
によって位置を表す
(指定する)座標。




$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$




二次元平面上のある点Pの位置を指定するときは

x軸，y軸をとり (x, y)で表わす。

これを「デカルト座標」という

極座(r, θ)をデカルト座標に変換する方法は

$x = r\cos\theta$　　$y = r\sin\theta$

作成日 . .
作成者

# 6、三角関数の微分

## (1) 無限は数ではない

1＋1は2であるが、無限＋無限は無限となる。

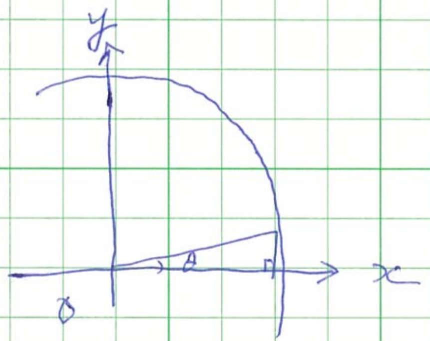
ヒルベルトのホテル

無限に部屋数があるホテルに、
無限の客が泊まっていた。
そこえ、無限の客を乗せたバスがやって来た。

最初から泊まっていた客を、無限にある偶数の部屋に泊め
バスでやってきた客を、無限にある奇数の部屋に泊めた
ので全員泊まることができた
つまり 無限＋無限 もまた ＝無限である。

=1

## (2). θが0に限りなく近ずくと sinに等しくなる




角度が0に限りなく近づいたとき、
sinθ と θは限りなく近づく。
→ 1となる

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ となる。

率

## (3) 微分とは、無限に短かい時間の変化である

の時間に対する割合

合切

電車の急ブレーキ と 速度の落ちた度合
無限に短かい時間の変化の割合を数学的に考える

(7) 微分するとは導関数を求めること

関数 $f(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$ は、

$f(x)=x^2$ を$\underbrace{\text{公式}}_{\text{導関数の}}$に代入して

$= 2x+h = 2x$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{(x+h)-x}=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{2x}$$

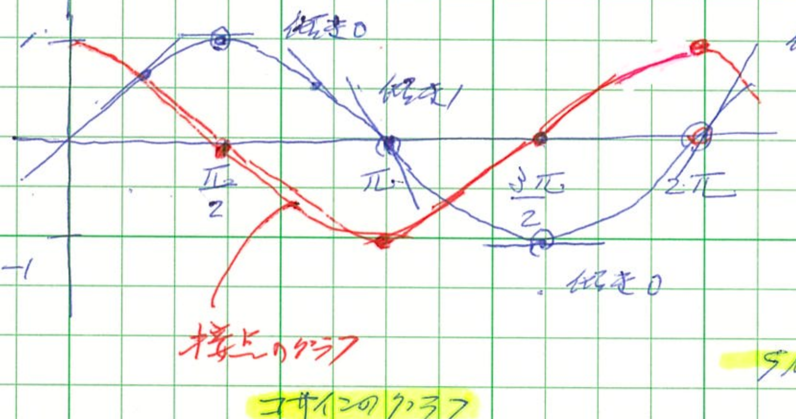
となる。hは限りなく0に近づいて行くので　$f'(x)=2$ となる

ある時点(位置)での

導関数がわかるとグラフの接線の傾きがわかる。

微分するという操作は、導関数を求めるということを意味する。

(8) サインの微分をグラフで考えると、




コサインのグラフ

sinの導関数は $\cos x$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

和積の変換公式　$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$　　$\sin\frac{h}{2}$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$=\cos x$

三角関数の加法定理

作成日 20 . .
作成者

(9) コサインを微分すると

$$\begin{tikzcd}
\sin x \arrow[d, "微分"'] & & -\cos x \arrow[ll, "微分"'] \\
\cos x \arrow[rr, "微分"'] & & -\sin x \arrow[u, "微分"']
\end{tikzcd}$$

サインを繰り返し微分すると、ぐるぐる回る。サインとコサインは無限回微分できる