第5回　企業組織再編

(　　　　　)

2019.09.30
会計と経営のブラッシュアップ
平成28年7月11日
山内公認会計士事務所

本レジュメは、企業会計基準及び次の各書を参考にさせていただいて作成した。(企業組織再編の会計と税務 山田淳一郎監修 H22.10 税務経理協会刊)(企業買収・グループ内再編の税務　佐藤信祐外著　2010. 11 中央経済社刊)(事業再生の法務と税務　太田達也著　H25.6　税務研究会刊)(組織再編の法律、会計税務　山田 BC　H27.2 法令刊)

H28.4.8 [illegible] 岩永悠先生の講義を拝聴して.

Ⅰ. 事業再生の諸手法、譲渡(分離)側と取得側からの検討

区　分	内　容	メリットとデメリット
(1)事業譲渡	① 営業(財産)の一部又は全部の譲渡	① 設計がしやすい
	② 契約による取引行為	② 簿外債務リスクが少ない
	③ 個々の財産の譲渡	③ 許認可の引継ぎの困難
	④ 株式の譲渡の方法	④ 事業譲渡価額の決定
	⑤ 営業権の計上(要説明資料)	⑤ 消費税の課税
	⑥ 充分な再建計画の必要性	⑥ 資産譲渡益の処理
(2)合　併	① 適格合併	
	② 非適格合併	
	③ 無対価合併	
(3)分　割	① 個別の取引でなく、包括的な資産負債の移転(包括承継)	① 個別の同意は不要
	② 第2会社方式の活用	② 許認可手続の容易化
	③ 適格、不適格の区分	③ 重畳的債務引受を行う方法
	④ 営業権(資産調整勘定等)	④ 簿外債務の承継リスク
	⑤ 対価の柔軟化	⑤ 消費税、不動産取得税、登録免許税
	⑥ 移転資産の範囲	⑥ 資産譲渡益の処理
	⑦ 充分な再建計画の必要性	
(4)その他の方法	① 債権放棄	
	② 増減資	
	③ DES	
	④ DDS	
	⑤ 株式交換、株式移転	
	⑥ 株式の譲渡	
	⑦ 個人不動産の譲渡	

本レジュメはブラッシュアップ日迄にホームページに up してあります
http://yamauchi-cpa.net/index.html　山内公認会計士事務所
yamauchi@cosmos.ne.jp

１．適格合併（税務処理）

(1) 被合併法人から合併法人への資産等の移転は簿価による。
(2) 被合併法人において、譲渡損益は発生しない。
(3) 被合併法人の利益積立金は、合併法人に引き継がれる。
(4) 被合併法人の旧株の譲渡損益は発生せず、みなし配当も生じない。
(5) 平成 22 年度税制改正
　① 合併法人において増加する資本金等の額の計算方法
　② 合併法人において増加する利益積立金額の計算方法
(6) 支配関係等の定義(H22 改正)
　① 完全支配関係
　　「一の者」が法人の発行済株式等の全部を直接若しくは間接に保有する関係。100％兄弟会社間、100％グループ内の三角合併を含む。
　② 支配関係
　　50％超の関係
(7) 無対価合併は原則として非適格合併となるが、企業グループ内の合併で、単に対価の交付を省略しただけと考えられる場合は適格合併として扱われる。
(8) 増加する資本金等の額
　適格合併により、合併法人において増加する資本金等の額は、被合併法人の合併の日の前日の属する事業年度終了時の資本金等の額から、合併による増加資本金額等及び抱合株式の帳簿価額の合計を減算した額となる。
(9) 利益積立金額
　純資産の額－増加した資本金等－抱合株式の帳簿価額
(10) 抱合株式
　① 合併法人が合併前から保有している被合併法人の株式をいう。
　② 抱合株式については、合併交付株式等の割当てを行わない場合にも、税法上は新株割当が行われたものと合併法人においてみなし配当の計算を行う。（非適格合併）
　③ 適格合併の場合は、抱合株式の帳簿価額を資本金等の額から減算する。
　④ 譲渡損益の計算は行わない。

株式の割当を行わず

適格合併 注意事項 （同一グループ内）

(1) 適格要件を満たすか — （税法上の問題はない）

(2) 被合併法人及びその株主に贈与等の課税関係が生じないか。

(3) 欠損金の繰越控除、特定資産の譲渡損失の損金算入

Ⓐ (4) 株主である親族間のみなし贈与はOKか。
（適格であっても、株主間において価値の移転、贈与は生じないか —）

(5) 相対取引としての企業の適正な交換価値。

↑

4、5のための合併比率の適正化

合併会社の1株当りの価値の算定	被合併会社の1株当りの価値の算定
	時価純資産評価

Ⓑ
(1) 個人間の場合は、相続税法上の株式評価 ・相続税評価 ㊟

(2) 法人が関係する場合は、土地等、有価証券等時価
（評価差の法人税相当額は控除しない）
（法基 1-9-14） 小会社評価 ㊟

↑

合併比率の算定においてはまずい？
但し、株主への贈与（上記Ⓐ）は、㊟
結果的にⒷで生じないのではないか。

3

〈適格合併判別フローチャート〉

(1) 合併に際して交付するのは合併法人株式または合併親法人株式いずれか一方の株式だけである。すなわち，現金等の株式以外の財産の交付は行われない。

- No → 非適格合併
- Yes ↓

(2) 被合併法人と合併法人との持分関係が（合併の前後ともに）100%になっているか。(注)

- Yes → 適格合併
- No ↓

(3) 被合併法人と合併法人との持分関係が（合併の前後ともに）50%超になっているか。

- No → (5)
- Yes ↓

(4) 次の2つの条件を満たしているか。
①被合併法人の合併直前の従業者のうち，おおむね80%以上に相当する数の者が合併後に合併法人の業務に従事することが見込まれていること
②被合併法人の合併前に営む主要な事業が合併法人において合併後に引き続き営まれることが見込まれていること

- No → 非適格合併
- Yes → 適格合併

(5) 被合併法人と合併法人とが共同で事業を営むための合併で，次の①～⑤（被合併法人の株主が50人以上である場合には①～④）の要件をすべて満たしているか。
①被合併法人の合併前に営む主要な事業と合併法人の合併前に営むいずれかの事業とが相互に関連するものであること
②被合併法人の合併前に営む主要な事業とそれに関連する合併法人の合併前に営むいずれかの事業のそれぞれの売上金額，従業者数，それぞれの法人の資本の金額若しくはこれらに準ずるものの規模の割合がおおむね5倍を超えないこと，又は合併前の被合併法人の特定役員（前頁参照）のいずれかと合併法人の特定役員のいずれかとが合併後合併法人の特定役員となることが見込まれていること
③被合併法人の合併の直前の従業者のうち，その総数のおおむね80%以上に相当する数の者が合併後に合併法人の業務に従事することが見込まれていること
④被合併法人の主要な事業で合併法人の事業と関連するものが合併法人において合併後に引き続き営まれることが見込まれていること
⑤合併の直前の被合併法人の株主で合併により交付を受ける合併法人の株式または合併親法人株式のいずれか一方の株式（議決権のないものを除く）の全部を継続して保有することが見込まれる者が有する被合併法人の株式（議決権のないものを除く）の数を合計した数が被合併法人の発行済株式（議決権のないものその他一定のものを除く）の80%以上であること

- No → 非適格合併
- Yes → 適格合併

非適格合併

適格合併

（注）　従業員持株会及びストックオプションにより取得した株式が5%未満である場合は，持分算定上これらの株式を分母から除きます。また，上記の持分関係には親子関係の他，合併当事会社が兄弟関係で，かつ，合併後に株式の継続保有が見込まれるものが含まれます。

Q&A 企業組織再編の会計と税務 山田淳一郎監修 H22.10 税務経理協会 発行より

2．適格合併と事業譲渡

2016.01.21

1. 適格合併（株式交付）の税務処理

A社(合併側)

資産	185	負債	80
B社株	15	資本	120

B社(被合併)

資産	100	負債	70
(含み益	10)	利益積立金	10
		資本金等	20

A社(合併後)

資産	~~270~~ 285	負債	150
		資本	~~150~~ 140
		自社株	△~~30~~ △15
		利益積立金	10

※被合併法人の資産には含み益10がある。
※合併法人に株式を割当交付
※B社株は抱合株式となる

(1) B社の資産等移転時の仕訳

(借)	負　債	70	(借)	資　産	100
	利益積立金	10			
	新株式	20			

(2) B社の資産等移転後のB／S

新株式	20	資本金等	20

(3) 次にB社が移転資産等の対価として取得したA社の株式は、直ちにB社の株~~B~~主に交付したものとして取り扱われる。

(4) B社から株主への株式交付時の仕訳

(借)	資本金等	20	(借)	新株式	20

(5) A社がB社から資産等を受入れたときのA社の税務処理

(借)	資　産	100	(借)	負　債	70
				資本金等	20　※
				利益積立金	10

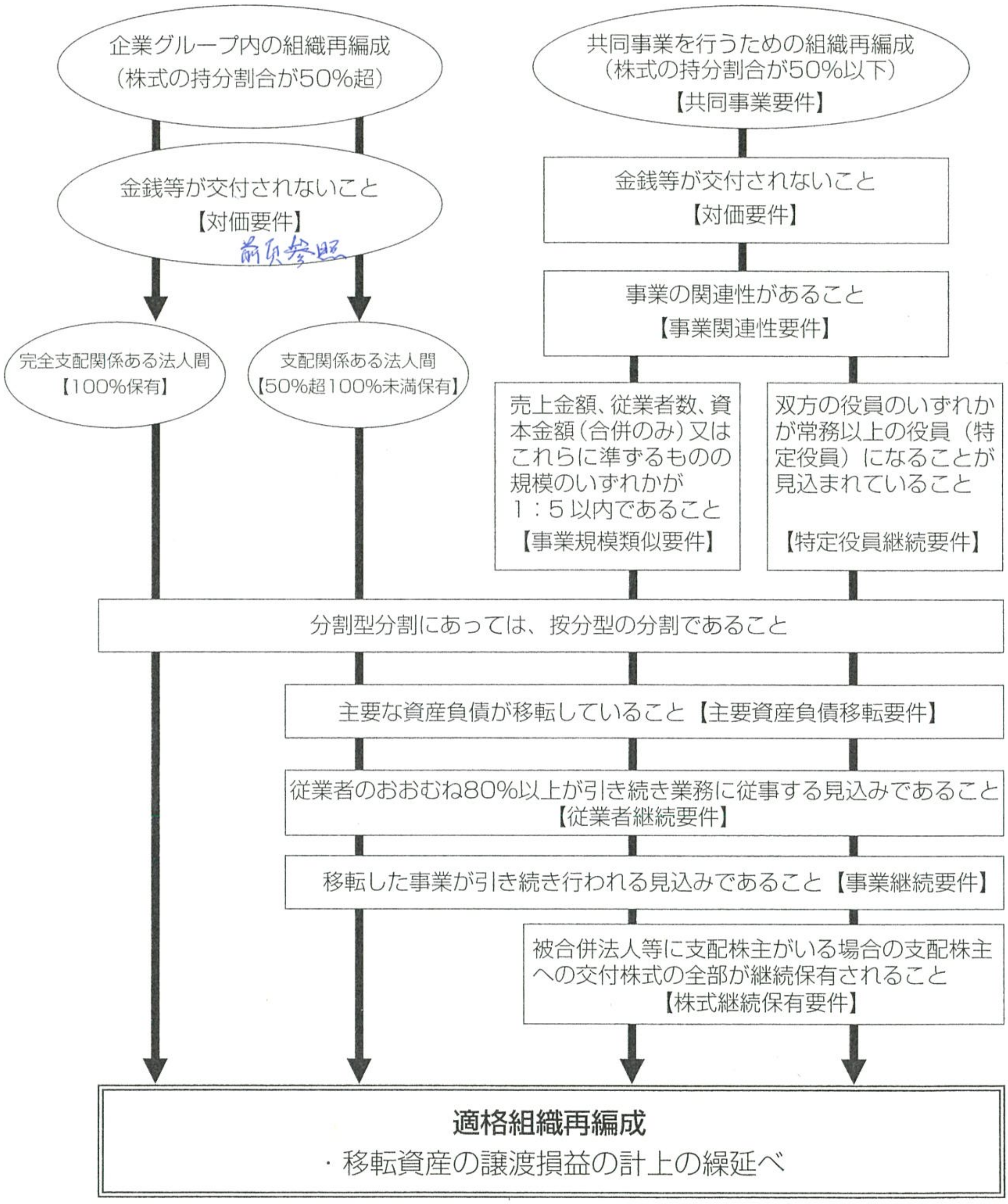
※資本金、資本準備金の割り振りは合併契約書で決める。
※無対価の場合は合併差益(資本準備金)となる。

(6) 抱合株式の処理

(借)	資本金等	15	(借)	B社株式	15

3

【合併・分割型分割の適格要件】



実践ガイド
企業組織再編税制　朝長英樹 外編　2017.12 清文社刊から

5．未来の条件（継続保有要件）

(1) **組織再編後の継続保有条件**の意味するところは、**二重の含み損の利用を防止するために存在する。**
①，②
仮に、簿価 3 億円、時価 1 億円の土地を所有する会社が、これを適格分社型分割(法法 2 十二の十三)で切り出した場合は、①親会社が、**2 億円の含み損を有する会社株式**を有し、②子会社は、**2 億円の含み損の土地**を所有することになる。
3
これを実現(②の土地を売却し、①の株式を売却) すれば、**2 億円の譲渡損が二重に利用**できてしまう。
これを防止するために、親会社が所有する子会社株式について継続保有の意思を要件にする(法令 4 の 3⑥－八)。
①

(2) 親会社への適格現物分配(法法 2 十二の十五)では、子会社の含み損が親会社へ移ってしまい、二重の含み損が作り出せないため、継続保有要件は課せられない。

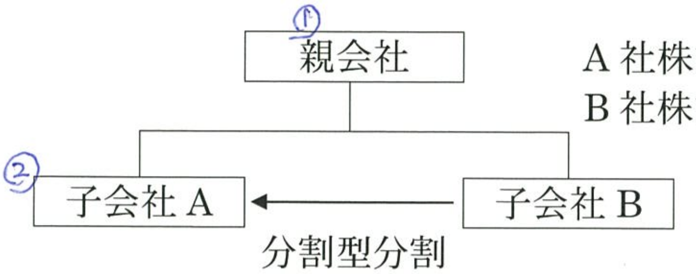
分割型分割によって支配株主へ行った株式
同一の者による完全支配関係の継続

(3) 切り出しの方向（上、下、横）
① **横への切り出し（継続保有要件必要）**……分社型分割
兄弟合併、分割型分割
↓
の支配株主
この場合は、**合併をした会社、分割設立会社、分割承継法人**が所有する物件の継続保有が課せられる。
株式
㊟
② 上への切り出し（継続保有要件不要）
親子合併、親会社を承継会社とする分割型分割、親会社への現物分配
③ **下への切り出し（継続保有要件必要）**
分社型分割、適格現物出資
含み損のある資産を子会社へ切り出して、含み損を持つ子会社出資金を作り出す。
この場合は、**親会社の子会社出資金について継続保有の要件**が課せられる。
④ **斜め下への切り出し（継続保有要件必要）** ①、②
取得した子会社株式
株式移転、株式交換 ① 株主が取得した完全親会社の株式と ②完全親会社が
親会社は、子会社株式の簿価承継と子会社の存在(含み損資産)によって分社型分割と同様に 2 重の損が出せるから継続保有が課せられる(法令 4 の 3⑱、⑲)
②の
5可に、①と②
⑤ 斜め上への切り出し（継続保有要件不要）
スピンオフ

㊟ 兄弟合併と分割型分割は、本来二重の含み損が出せないので、継続保有を要求する必要はなかったのではないか。
（支配株主が、合併、分割で割当てられた株式のみしか含み損は出せない）

6．継続保有要件の変更（分割承継法人に限定）

① 企業グループ内の分割型分割に係る適格要件（関係継続要件）は、①支配法人と分割承継法人との関係が継続することが見込まれていることとする。②



A社株式(継続保有が要件)
B社株式(処分しても適格要件に抵触しない)

子会社Aの保有する含み損資産は？

つい、資産の含み損に目が行ってしまうのだが….

7．共同事業要件

(継続保有要件必要)
被合併法人等の発行済株式の50％超を保有する企業グループ内の株主についてのみ、交付を受けた合併法人の株式の全部を継続して保有することが見込まれていることを条件にしている(法令4の3④五、⑧六イ、⑳五、㉔五)。

これは、支配要件に基づく合併、あるいは会社分割についての継続要件と同等である。

ヤフー事件

8．適格合併（税務処理）

(1) 被合併法人から合併法人への資産等の移転は簿価による。
(2) 被合併法人において、譲渡損益は発生しない。
(3) 被合併法人の利益積立金は、合併法人に引き継がれる。
(4) 被合併法人の旧株の譲渡損益は発生せず、みなし配当も生じない。
(5) 平成 22 年度税制改正
　① 合併法人において増加する資本金等の額の計算方法
　② 合併法人において増加する利益積立金額の計算方法
(6) 支配関係等の定義(H22 改正)
　① 完全支配関係
　　「一の者」が法人の発行済株式等の全部を直接若しくは間接に保有する関係。100％兄弟会社間、100％グループ内の三角合併を含む。
　② 支配関係
　　50％超の関係
(7) 無対価合併は原則として非適格合併となるが、企業グループ内の合併で、単に対価の交付を省略しただけと考えられる場合は適格合併として扱われる。
(8) 増加する資本金等の額
　適格合併により、合併法人において増加する資本金等の額は、被合併法人の合併の日の前日の属する事業年度終了時の資本金等の額から、合併による増加資本金額等及び抱合株式の帳簿価額の合計を減算した額となる。
(9) 利益積立金額
　純資産の額－増加した資本金等－抱合株式の帳簿価額
(10) 抱合株式
　① 合併法人が合併前から保有している被合併法人の株式をいう。
　② 抱合株式については、合併交付株式等の割当てを行わない場合にも、税法上は新株割当が行われたものと合併法人においてみなし配当の計算を行う。
　③ 適格合併の場合は、抱合株式の帳簿価額を資本金等の額から減算する。
　④ 譲渡損益の計算は行わない。
(11) (6)①完全支配関係を判断する際には、発行済株式から次の株式を除外する。
　ⓐ自己株式、ⓑ従業員持株会が取得した株式等の合計割合の 5％未満の株式

Ⅱ　組織再編税制（H29 改正）

1．組織再編税制を読みこなすには

(1) 完全支配要件、支配要件、共同事業要件

— 理屈のない形式要件である

(2) 5 年 50%超の支配関係の有無

— 実質要件である

適格要件は満たすが、5 年 50%超を満たさないリスク

(前掲書③を参考)

(イ)適格要件を満たさない

(ロ)適格要件は満たすが、5 年 50%超の支配関係は満たさない

(ハ)適格要件を満たし、5 年 50%超の支配関係も満たす

(3) 何故継続保有要件が存在するのか

仮に、青色欠損金 100 億円を抱える A 社が、2 年前に買収した資本金 100 万円の B 社を吸収合併したがために、A 社が有する青色欠損金 100 億円が利用できなくなる。

2．再編手法の分類

(1) 一覧表

方　向	取　引	移　動	移　転
横	組織行為	人格承継	兄弟合併・分割型分割
上	組織行為	人格承継	親子合併・吸収分割
	資本取引	物の移動	現物配当・現物分配
下	組織行為	人格承継	分社型分割
	資本取引	物の移動	現物出資
斜め下	組織行為	支配権の移動	株式交換・移転
	資本取引	〃	株式の現物出資
斜め上	組織行為	〃	子会社の分離独立(スピンオフ)

金融政策

非伝統的金融政策の経済分析

竹田陽介 矢嶋康次 著 2013.11 日本経済新聞

2019.07.22
2019.08.19
2019.08.26
2019.09.02
2019.09.24
2019.09.30

1. 全般

(1) 1999年2月の日銀によるゼロ金利政策の導入以来
現実的な、実用的な
世界はプラグマティックな対応、非伝統的な金融政策の発動を余儀なくされてきた

(2) 非伝統的な手法が採用されて10年以上経過(1999-2012)したが、金融政策上の効果はどれほどあったかの実証分析の必要性
(資産価格の上昇に効果は見られない)

(3) 2012年の政権交代
(デフレ脱却はまだ行われていない)

(4) 日本はじめ欧米諸国で実施されてきた非伝統的金融政策を見ると、貨幣という象徴的道具の独占的な供給の中で、中央銀行という専門家集団による知性の結晶が個人の才能の下で実行に移されてきたように映る。(しかし、日本のデフレ脱却には的はずれか?)

(5) それはあたかも、重症患者の治療にあたる医師が、治療薬の投与の効果の検証を通して、治療方針を漸次変えていくように、定型に拘らず、プラグマティックな政策判断に従って、漸進的に履行されてきた。(この政策の変更が根本的でない?)

効果が見られない
(6) 非伝統的金融政策は、リアル社会における壮大な社会実験ともいえる

高齢化や経済の谷……
(7) デフレの真因は、将来の不安が増し、貯蓄を増加させ、消費や設備投資に消極的になる負の需要ショックに真因がある
これは、沖縄経済における生産性(アウトプットと資源とインプットの非効率性)の低さにも依っている感がする。

2、日破れて中銀ありや

(1) 中央銀行の近未来像について、 経済学から俯瞰する

中央銀行の近未来像とは、どんなものか？

(2) 本書のコンセプト 「金融深化」Financial deepening
をキー・コンセプトとする

何を買うか、どれほど買うか、

(3) 中央銀行は、「最後の買い手」として
リスク資産市場を積極的に育成する必要がある。

この点に関して
FTPL、MMTは
不適当か、

(4) 金融政策と資産価格形成の問題

(5) 金融政策の伝統とは、何を意味するのか
"資産価格にもたらす短期的な効果ではないか"？

(6) 短期的な視点
非伝統的金融政策の類型 とその効果

(7) 長期的な視点と中央銀行の近未来像
長期的な問題、マクロショック
少子高齢化
地震など自然災害

馬鹿らしいほど円の値うちがないということは——
(1) 円安であり
(2) 海外の物価上昇
(3) 円安と円の購入力が低い とは どういう関係にあるか —

デフレーション

1990年代後半以降、日本において顕在化したデフレーションについて考える際、1930年代の大恐慌の教訓が想起される。

日本経済が1990年代後半以降、陥ってきた「流動性の罠」とは、利子率が下限にあることを誰もが知っており……

この下においては、金融政策の効果は発揮されない

7. 非伝統的金融政策の類型

(1) 非伝統的金融政策は、伝統的な政策手段であった超短期の銀行間貸借市場における金利がゼロの下限制約に直面した下での金融政策である。

(2) 第一はゼロ金利政策である。（マイナス金利）
第二は、量的緩和政策である（バランスシートの拡大）
第三は、信用緩和政策である。（長期国債の購入）

これで充分とは言えない

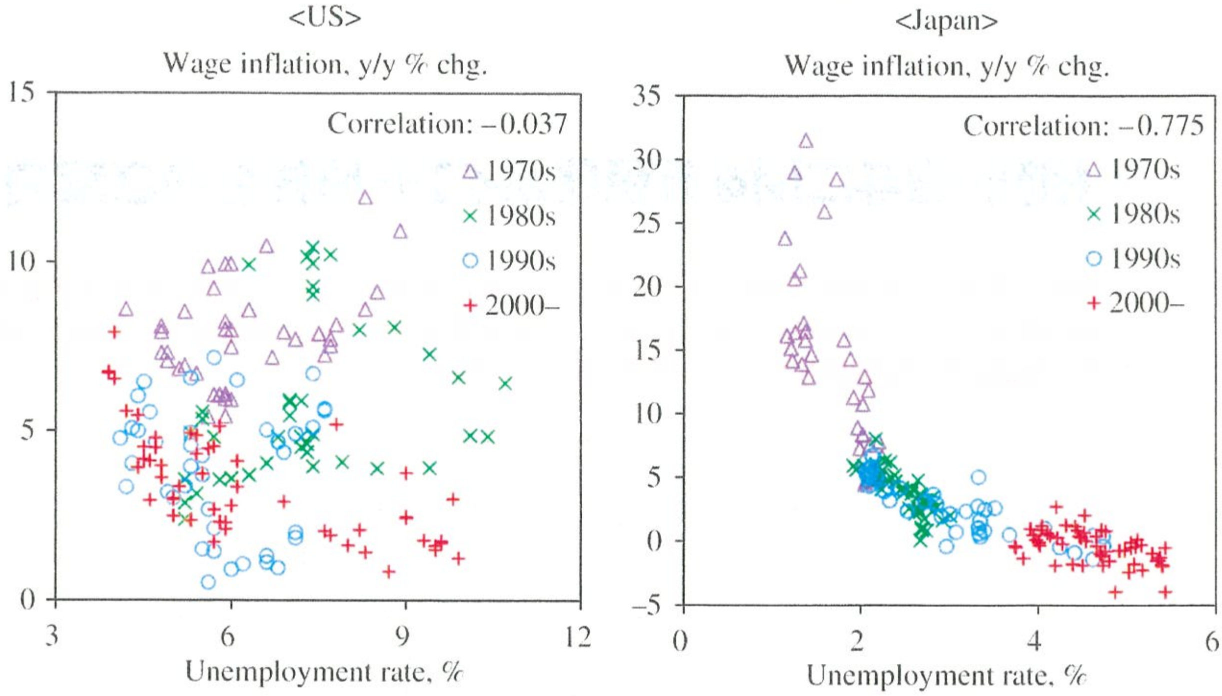
(3) こうした中では、中央銀行の機能は、金融機関の資金流動性を高める「最後の貸し手」ではなく、金融資産の市場流動性を高める「最後の買い手」と呼ばれる

中央銀行は何を買うべきか
非伝統的金融政策の効果

(1) 資産として満たす条件
健全性、流動性、中立性

(2) あるべき中央銀行の近未来像

「高圧経済」？



Muto and Shintani."An Empirical Study on the New Keynesian Wage Phillips Curve: Japan and the US" *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 2017.

中央銀行の非伝統的金融政策

目的

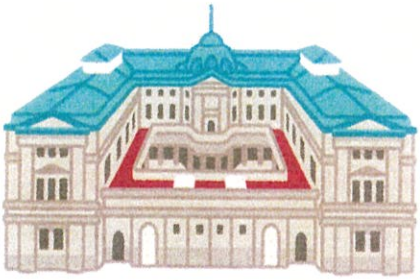
a. インフレ期待に働きかける

b. 金融機関のリスクテイクを促す

手段

1. マイナス金利
2. バランスシートの拡大
3. 長期国債の購入

上智大　経済学部　竹田陽介教授レジメから



デフレ・FTPL・MMT
(デフレ脱却に向けて)

(8月のごあいさつ)
2019年9月1日（日）

アベノミクスは、デフレ脱却の**物価上昇目標 2%**を目指したが、未だ道半ばである。2%という物価の上昇を行おうとすれば、第一に必要なことは消費の拡大である。従って、**消費税の引き上げ**は、逆に消費にブレーキをかけ、**デフレ脱却の反対方向の施策**である。

1990 年代後半以降、日本において顕在化した**デフレーション**について考えるとき、1930 年代の大恐慌の教訓が想起される。そのとき救世主となったのはケインズの**有効需要の原理**であった。日本経済が、1990 年代後半以降、陥ってきた**「流動性の罠」**とは、利子率が下限にあることを誰もが知っており、この下においては、**金融政策の効果**は発揮されなかった。

FTPL(**物価水準の財政理論** Fiscal Theory of the Price Level)の基本は、名目国債残高を、現在の物価水準で割った値が、将来にわたる実質財政余剰の現在価値の期待値に等しいという式で表される。

名目国債残高／現在の物価水準＝実質財政余剰の現在価値

増税の延期によって、右辺の財政余剰が減少すると、左辺も減少しなければならない。ところで名目国債残高は所与なので、物価が上昇することになり、**デフレ解消へ向かう力**が生じる。このことがシムス教授などが話された、先ず、日本の 2%のインフレを達成後に消費増税を行うべきだという考えになるのではないか。

MMT(**現代貨幣論** Modern Monetary Theory)は、通貨発行権を持つ国家は、債務返済に充てる**貨幣を自在に発行**できるため、財政赤字で国は破綻しないと説く。完全雇用と物価安定を達成するには**金融政策**ではなく、**財政政策**への依存度を高める必要がある。インフラや教育、研究開発に**投資**して、**国の長期的な潜在成長率**を高めるべきであるとする。理論の構築や経済の多様性の配慮の違いはあるが、消費増税のマイナス効果や誤った**財政政策**という意味では、上記の FTPL と同じ面を感じる。

日本のデフレ解消の政策は的はずれで政策に根本的な誤りがあったのか？**デフレとは需要不足であり、その真因**は、将来の不安(経済不調、少子高齢化、天災…)に対し、国民の消費や設備投資に消極的な負の需要ショックに真因がある。経済の活性化、効率化へ向けた強力な政策とともに、国民の意識を変えるような**前向きの明るさ、意識の変革**が国、個人とも必要ではないか。これは、**沖縄経済における生産性**(アウトプットの貧弱とインプットの非効率さ)を前向きに改善すべき**活性化、効率化の必要性**にも似ている感じがする。

第 87 回勉強会
(2019 年 8 月 28 日)

金融と財政の曖昧な政策割当

講　師　上智大学経済学部経済学科　教授　竹田陽介氏
紹介者　元日銀那覇支店長　水口毅氏 (参加者 29 名)

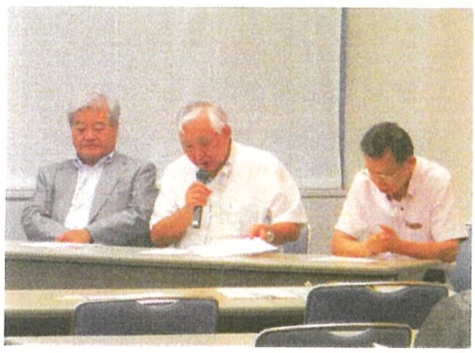
「昨今もて囃されるMMT（Modern Monetary Theory、現代貨幣理論）の流行に見られるように、伝統的な金融政策は無力化し、財政規律の箍は緩み解ける現状がある。財政当局と中央銀行が統合された政府の予算制約の下で、金融政策と財政政策の各政策に割り当てられる目標および手段が、曖昧になっている。両政策を繋ぎ、それらの整合性を図る国債管理の役割が、益々増大しつつある。

本講演では、財政金融政策に対する伝統的な経済学の考え方を振り返り、現在直面する問題点を指摘する。さらに、求められる新しい見方の萌芽について議論したい。具体的には、中央銀行の独立性、国債管理、マイナス金利政策、金融政策の正常化、財政赤字の政治経済学などについて触れる」、とのことで充実したレジュメを作成していただきご講演をしていただいた。

最初に、危機時において、「金融政策と気候変動の問題は似ている」との国際協調の必要性の話、アルゴアの気候変動の重要性に対し、人類共有の問題として協調が必要であるが、トランプの言動は驚くべきものがある。金融政策については、リーマン以後の金融危機時の国際通貨制度の安定性の回復は、各国の通貨切下げ競争など協調性を欠いている面もあり、加えてトランプのアメリカ第一主義が影を落としている。

現在の経済停滞について、「高圧経済？」が必要かもしれない点を、1970 年～2000 年代の Wage inflation の米国と日本のフィリップス曲線の対比で、日本の 2000 年代の金利がゼロのレベルではりついている状況に対し、中央銀行の非伝統的金融政策として、目的を、(a)インフレ期待に働きかける、(b)金融機関のリスクテイクを促す、また、手段としては(1)マイナス金利、(2)バランスシートの拡大、(3)長期国債の購入であった。ところが、これに対するデフレ脱却の効果は見られず、これはどういうことなのかの質問があった。これに対して先生のご意見は、MMT による財政支出の拡大は議論の余地があり、これらの手段等以外のイノベーション等による違った観点からの施策が必要でないか、それは 3 つの手段に加えて、向上、活性化に向けた、明るさ、前向きの改革への意識ではないかとのご指摘があった。これは意識の変化が具体的な施策に及ぼすプラスの効果の示唆とも感じた。

先生の著書、「非伝統的金融政策の経済分析」(2013 年日本経済新聞社、第 54 回エコノミスト賞受賞)は、1999 年 2 月の日本銀行によるゼロ金利政策の導入以来、世界の中央銀行は、従来行われてきた金融政策の枠を超えた非伝統的な金融政策の発動を余儀なくされている。この 10 年余の金融政策における効力について論ぜられたもので、タイミングの良い実証的な経済分析であった。この非伝統的金融政策を、人口減少や自然災害などのマクロショックに直面する現代の中央銀行の課題に対する壮大な社会実験との観点から論ぜられ、興味深いものがあった。更に先生は、この続編とも言うべき、更にこの 6 年間の分析書も計画しておられると聞いた。



(第　回) FTPL、MMT、デフレ

2019.09.02
2019.08.24

物価水準の財政理論
FTPL

プリンストン大学シムズ教授
(ノーベル経済学賞受賞者)

もし、その国の国債の債権者のほとんどがその国の者であるならば、財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、①物価は緩やかに上昇(インフレーション)し、それが常態化することで②財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的である、とするものである。

これは、将来に向って財政再建を放棄することによって、現在のインフレ率を高めることが目的とされている。
その基本は、名目国債残高を現在の物価で割った値が、将来にわたる実質財政余剰の現在価値の期待値に等しいという関係式である。

水準

名目国債残高/今期の物価＝実質財政余剰の現在価値の期待値

ここで、財政余剰とは、「政府収入ー政府支出ー支払利子」であり、基礎的財政支出に近いものだ。
P/L 的に言えば、経常利益と営業利益の差のようだ。

邓小平、

現代中国を理解するための必読書

中国を理解するための必読書　ケ02.　エズラ・ヴォーゲル

経済学③

2019.08.24

現代貨幣理論
(MMT)

Modern Monetary theory

1. 自国通貨建の国債は破綻しない
2. 政府の負債は国民の資産
3. 銀行は貸出によってお金を作ることができる
4. お金は物ではなくて情報(経済力に裏付けされた)
5. 日銀は、2013 年から 6 年間で 400 兆円の国債を買取り、2016 年には金利の引き下げも行ったが 2%の物価上昇は達成できなかった。
6. 一旦、インフレ傾向になりかけたが、2014 年の消費増税でまた下がった。
7. MMT　modern monetary theory
8. インフレの原因を明確にして、それに対応できれば問題はない。
   インフレ＜所得増加なら OK

日本がデフレ対策ができなかったのは何故か？

(1) 政府債務が過大であったからか

(2) だから需要拡大　ができなかった
〃 財政支出の拡大　〃
〃 減税　〃

(3) 要は、財政支出ができなかった。

↓

だからMMTの議論が必要なのではないか
FTPL

9. MTT

(1) 自己通貨を持つ政府は、財政的な予算制約に直面することはない

— 国債をいくらでも発行できるし、それによって破綻することはない

(2) 全ての経済及び政府は、生産と需要について物あるいは環境的な限界がある

— 急激なインフレにならない限りは限界はない

(3) 政府の赤字は、他の経済主体の黒字である

— 政府の借金や支出は、国民の財産や収入となる

連結 B/S

資　産	負　債
0	0

紙幣を発行して返済する必要もない

(4) 連　結

政府の B/S

	負　債
	国債 1,000 兆円

日銀の B/S

資　産	負　債
国債 1,000 兆円	民間銀行からの債務 1,000 兆円 (国債の買取分)

日本政府は、その返済能力に限界はない!!

理由は、借金の返済に必要な通貨を発行しているのは政府だから。

政府の財政赤字は、それと同額の民間部門の貯蓄を生みます。

政府の財政赤字は民間部門の貯蓄によってファイナンスされているのではない。

信用貨幣論によれば、

資金量の制約はないが、借り手の返済能力という制約はある

5、グリーンスパン議長の下でのFRB

(1) グリーンスパンは、1987.8～2006.1まで　18年半
FRB議長を務めた
この間は米国のGreat Moderation（大いなる安定）と呼ばれる
低インフレ、安定成長の時期であった。

(2) 87.10のブラックマンデー、94末のメキシコの金融危機
97のアジア通貨危機などの次々に乗り切った。
その手腕はmaestro（名指揮者）と称された。

(3) 2006.6に0.25%の利上げが有り、（連続17回の利上げ）
5.25%となり、その後2007.8まで続いた。

(4) この利上げにより、懸念されてきた「住宅バブル」が
いよいよはじけることとなった。
全米の住宅価格は2006までの10年間で約2倍程度
大都市では、3倍以上上昇した。
07はじめからから下落が始まった

(5) 住宅バブルに対するグリーンスパン主義は、
① バブルの気配があるとしても、それを技術革新による
技術ショックとの識別は困難である
② 例え識別できたとしても、バブル潰しに大した効果は期待できない
③ もし引締を行うなら　景気安定化を損なう程の引締めが必要である
④ 崩壊に伴う事後的措置のコストの方が低い

8、長期的趨勢と公的債務管理の現状

(1) 中央銀行は、社会の長期的趨勢に合わせた金融政策への変容を余儀なくされる

(2) 少子・高齢化

わが国における65才以上の割合は

1970年	7.1	(1.0)
80	9.1	
90	12.1	
2000	17.4	(2.5)
2010	23.0	(3.4)
2020	29.1	(4.1)
2050	38.8	(5.5)

(3) 年金制度の破綻

(4) 家計貯蓄率の低下

(5) 予期しないインフレーションのリスク

(6) マクロショック (自然災害)

1970－2012 年均　全世界被災者　1.6億人

1990年と比較して　発生件数で3倍、被災者で2倍

(金融危機)

(7) 日本の公的債務

2019.09.30
2019.09.24
2019.09.09
2019.09.02
2019.08.19
2019.06.17
2018.10.23

微分方程式

平成 29 年 7 月 24 日

参考図書（Excel で学ぶ微分積分　山本将史著　H24.8 オーム社）
（すぐわかる微分方程式 石村園子著 1997.8 東京図書刊）
（微積分のはなし 大村平著 1985.3 日科技連刊）
（Excel で学ぶ微分方程式　鈴木肇著　H18.2 オーム社）

1．将来予測

(1) 化石－放射性元素

半減期 $y^1=-ky$
減る速度 y^1 は、現在量 y と比例する。
これを積分すると、現在量 y が求められる。$y=C\cdot e^{-ky}$

（明るい!!差
光の
暗いところでの明るさと
明るい場所との差
暗いところ !!

(2) 刺激と反比例などの微分方程式

① 刺激が変化するとき、その変化に対する敏感度は、もとの刺激の大きさに反比例する。（ポルノ映画の製作会社）、前作より 1 割以上の興奮度
② 台風の進路予想　ベクトル（その点で進むべき方向と速さ）
③ 解曲線（ベクトルを接線として持つような曲線）
④ 風の流れ、民族の大移動

(3) 限界速度

落下物は空気の抵抗がないものとすると、落下距離の√に比例して落下速度が増大する。
ビルの屋上から落したリンゴの質量を m とすると、その作用している引力は mg(g は、地表付近の物体を引きつける重力の加速度で $9.8m/sec^2$ である。)

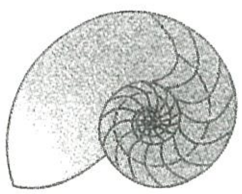
$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$　　$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面へ向う速度の変化率（加速度）

しかし、空気抵抗が落下をやめさせる方に作用する。
空気抵抗の強さは物体の速度が比較的遅いうちは速度にほぼ比例し、物体の速度が速くなると速度の 2 乗に比例する。
従って、空中を落下する物体がある速度になると、引力と空気抵抗の力がちょうどバランスして、それ以上速度が増大しなくなる。
これを限界速度という。（パラシュートでの落下速度）

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt}$　　$k\frac{dx}{dt}$は空気抵抗

$\frac{dx}{dt}$は速度であり、$\frac{dx}{dt}=$ vとすると

$mv=mg-kv$



増殖・崩壊を表す

①-2
89頁の説明

～増殖・崩壊の微分方程式～

世の中のさまざまな現象の変化を表すのが微分方程式であり、これを解くことによって、それらの現象を解明することができる。前項で、その1つの例として、時間xに対するyの変化率が、その時点におけるyの量に比例する現象を表す微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx}=ky \cdots ①$$

であることを見た。この微分方程式で表される現象は、たくさんある。たとえば、倍々の法則（18ページ）であり、さらに光が物質中を通過するときの明るさの減少（52ページ）であり、水の濾過（ろか）の回数（84ページ）、化石の年代測定（86ページ）など、一定の倍率で変化する現象はこの微分方程式で説明できる。

さて、①の解を求めよう。この式の両辺をyでわると、

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=k$ となるから、xで積分して、$\displaystyle\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx=\int k\,dx$ である。

この式の左辺は、$\displaystyle\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx=\int\frac{1}{y}\,dy$ となるので、$\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy=\int k\,dx$

となる。左辺をyで、右辺をxで積分して、

$\log y=kx+C$（Cは積分定数）となる。これを、指数の形に直して、$y=e^{kx+C}=e^{kx}e^{C}=Ae^{kx}$（$e^{C}$を$A$で表す）。つまり、関数$y=Ae^{kx}$が微分方程式①の解である。ここに指数関数が現れた。この式から倍々の法則、つまりxが1増えるとyが2倍になる式$y=2^{x-1}$（18ページ）が右図のようにして導き出せる。

対数関数の微分（導関数を求める）

$$\boxed{\text{導関数の定義式}\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

より

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h)/x}{h}$$ ← 引き算が割り算に!!

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\boxed{\log_a M^k = k \log_a M}$$ Mのk乗は $\log_a M$ のk倍に!!

ここで、$h/x = k$ とおく、$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}}$ となる.

ここで、kが0に近づくと、$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は、ある一定の数 e に近づく。

つまり、$\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$ である。$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$

となり、底 a を e にすれば、$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$ となる。

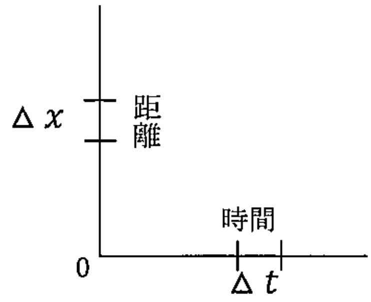
落下速度

経過時間　t

落下距離　$y = x$

落下速度　$y' = \frac{dx}{dt}$

落下加速度 $y'' = \frac{d^2x}{dt^2}$



$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$

$y' = \frac{dx}{dt}$ — 距離の変化 / — 時間の変化 …… 落下速度

経過時間 tで落下速度xを微分すると $\frac{dx}{dt}$

例えば $f'x(t) = at^2 + t$ （落下速度）

落下速度xを経過時間 tで更に微分すると $\frac{d^2x}{dt^2}$

例えば $f''x(t) = at + 1$ （加速度）

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$

$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面のほうに向って落下速度を増して行くときの“速度の変化率”つまり、加速度を表わす。

落下速度 $\frac{dx}{dt} = gt(1)$　gは重力

位置の変化 $x = \frac{1}{2}gt^2(2)$

(2)から$t^2 = \frac{2x}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$

これを(1)に代入 $gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{dx}{dt} = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$ となる。

すなわち落下速度は $\sqrt{2gx}$

(空気抵抗がある場合)

m, kは比例定数、$-k\frac{dx}{dt}$ は空気抵抗

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = v$ とすると、

$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ となる。

速度に比例する空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv}$

この両辺をmで割ると、

$\frac{dv}{dt} = \frac{mg-kv}{m}$　$dv = \frac{dt\cdot(mg-kv)}{m}$

$\boxed{\frac{m}{(mg-kv)}dv = dt}$

これは $f(v)dv = g(t)dt$ となる。

左辺はvだけの関数なのでvで積分することができ、右辺はtだけの関数なのでtで積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると、

$\int\frac{m}{mg-kv}dv = \int dt$

$\therefore -\frac{m}{k}log(mg-kv) = t + c$

が得られる。

$\therefore log(mg-kv) = -\frac{k}{m}(t+c)$

$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$

$\therefore v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$　となった。

3． 微分方程式の解き方

（代数方程式）

方程式を解く ― その方程式を満足させる**未知数**を見い出す

（微分方程式）

微分方程式を解く ― その方程式が成立するような**関数の形**を見い出す

時間 t、速度 v、落下距離 x

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv$ ― ①

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv^2$ ― ②

のように、導関数を含んだ方程式を、微分方程式という。

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 階の導関数

$\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}$は、2 階の導関数

……………………………

$\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}$は、n 階の導関数

これに対して、

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 次の導関数

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2$は、2 次の導関数

……………………………

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^n$は、n 次の導関数と呼ぶ

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 階 1 次の導関数

$\left(\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}\right)^3$は、2 階 3 次の導関数

$\left(\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}\right)^m$は、n 階 m 次の導関数と呼ぶ

４．変数分離形

空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{mg} - \mathrm{kv}$$

この両辺を m で割ると

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{mg - kv}{m} \longrightarrow \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Mg - kv}}$$

さらに変形すると

$$\frac{m}{mg - kv}dv = dt$$

これは$\underline{f(v)}dv = \underline{\mathrm{g}(t)dt}$の形となっている。

左辺は v だけの関数なので v で積分することができ、右辺は t だけの関数なので t で積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{m}{mg - kv}dv = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k}\log(mg - kv) = t + c$$

$$\therefore \log(mg - kv) = -\frac{k}{m}(t + c)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$$

$$\therefore \mathrm{v} = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$$

となり、v を t の関数として表わせる。

これを微分方程式の一般解という。

複利の計算

ある瞬間の現在高に比例して利息が付加されていく場合の総額を$x(t)$で表わし、

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = ax$$

により$x(t)$の変化を明らかにする。

この式は変数分離形の微分方程式で、x の関数と t の関数を

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = adt$と両辺に分離し、

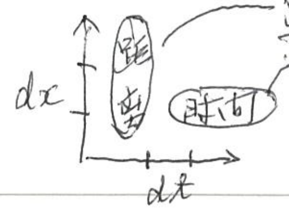
$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \int adt$$

$$\therefore \log x = at + c$$

t=0 のとき、x=A として

$$x = Ae^{at}$$

細菌の増殖、細胞の分裂、複利の元利合計など



$\dfrac{\text{距離の変化}}{\text{時間の変化}}$ → 落下速度

8-2

複利計算

xは時間の経過につれて、どのように増大してゆくか？

ある瞬間にxが増加する割合はそのときのxに比例するので

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax \text{ の関係となる}} \quad ①$$

$\frac{dx}{dt}$は、元利合計の増加率（単位期間に付加される利息）

aは、利率

xは、そのときの元利合計

xが経過時間tにつれて、どのように変化するかを知るためには、

$x(t)$の関数形（積分できる式）を探し求めればよい。

式①は、xをtで微分した形なので、xの形を知るには、

この式をtで積分すればよい筈である。ところが

右辺のxはtのどのような関数かわからないので、dxもdtも

小さくても一人前の値として扱うために①式を変形する

$$\boxed{\frac{dx}{x} = a\,dt} \quad ②$$

tとxが微小変化の関係として示される

そして積分する

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt \qquad \int \left(\frac{1}{x}\right) dt = \int (a)\, dt$$

積分を実行すると、

$$\log x + C_1 = at + C_2$$ となる

$$\log x = at + C_3 \quad (C_2 - C_1 = C_3 とする)$$

この式は

$$e^{at+C_3} = x$$

すなわち

$$x = e^{at} \cdot e^{C_3}$$ を表わす。

$t=0$ のとき $x=A$ とすると $e^{C_3}=A$

$$x = Ae^{at}$$ の関係となる

これが、tの関数としての x の形である。

たとえば、1分あたり $\frac{1}{10}$ の割合で増殖している細菌の一群がある。
1時間後には何倍になっているか

$a = 0.1/分$
$t = 60分$

$$Ae^{0.1/分 \times 60分} = Ae^{6} = 403A$$

1時間後に403倍となる。

10日で1割の利上へ

365日でいくらか

$a = 0.1/10日$

$t = 365日$

$$Ae^{0.01 \times 365} = 38.47A$$

$$1.1^{\frac{365}{10}} = 32.42$$

合成関数

2つの関数 $y=g(u)$、$u=f(x)$ において

前者の式に、後者の式を代入してできる関数

$y=g(f(x))$ をいう。

合成関数の導関数

$\{g(f(x))\}' = g'(u)f'(u)$ である。

つまり、合成関数 $y=g(f(x))$ の導関数は、

$g(u)$ を u で微分し、$f(x)$ を x で微分して

得られる2つの導関数の $g'(u)$、$f'(x)$ の積である。

対数微分法

$y = x^p$ の微分　対数で表す

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

(左辺)

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

(x の変化を考えずに
y が変化する関数と
考える
→ y の関数である)

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

↓ y で微分　　↓ x で微分

$(\log y)' = \frac{1}{y}$　　y'

↓ かけ算

$$\boxed{(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}}$$

(右辺)

$p \log x$

↓ x で微分

$$\boxed{(p \log x)' = p \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{x}}$$

$y = x^p$

$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x}$ より　$y' = \frac{p}{x} \cdot y = \frac{p}{x} \cdot x^p = px^{p-1}$

$$y' = px^{p-1}$$

m mass 質量 物体が有する固有の量　　微分方程式

物体の重量とは区別される

g gravity 重力 地上で、物体を地球に引く力

1. 高層ビルの屋上から リンゴを落下させたとき

リンゴに作用している力は "引力" だけである。

2. その大きさは、リンゴの質量 m と重力 g をかけたものである。

3. 重力 g とは、地球が地表付近の物体を引きつける力、

物体に発生する加速度の大きさで 重力の加速度と呼ばれ、

$9.8 m/sec^2$ である。

4. 重さとは、質量 m の物体を 地表付近にもってくると mg の重さになる。

従って、質量 m のリンゴは、地表付近では mg の重さを持っているので

リンゴを地球のほうへ動かそうとしている力は mg ということになる。

5. リンゴに mg の力が作用しているとき、

その力でリンゴに起こさせる加速度（速度の変化率）は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \qquad (9.17)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ は、リンゴが地面のほうに向かって速度を増して

行くときの "速度の変化率"、つまり加速度を表わす。

6. 加速度

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

両辺を m で割って $\frac{d^2x}{dt^2} = g$ を得る　(9.18)

7. 加速度から、速度や変位（位置の変化）を求めると

(9.18) の両辺を t で積分し、

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \int g\,dt$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ は、x を t で2回微分したものなので、

これを t で積分すると、微分1回分だけ元へ戻って

$\frac{dx}{dt}$ になる。

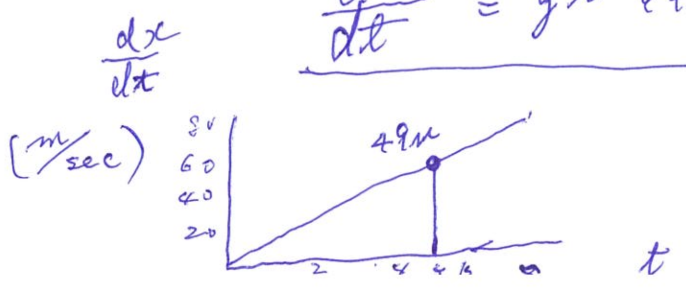
$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1 \qquad (9.19)$$

C_1 は、どこから積分をはじめるかによって決まる積分定数であり、$t=0$ から始めるとすると

$\frac{dx}{dt} = 0$　$C_1 = 0$ となり

8. 落下速度は

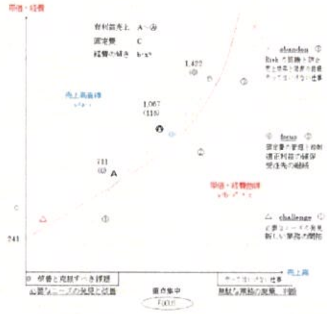
$\frac{dx}{dt} = gt$ となる　(9.20)



g は、9.8m/sec^2 であり、速度は時間の経過につれて増加しており5秒後には、49m/sec に達する。

H29 4/24 M

2019.01.21
2018.10.15
2018.08.13
2018.06.10
2018.04.16
2018.01.07
2017.10.10
2017.07.10
2017.04.23



指数・対数

会計と経営のブラッシュアップ

2019.07.28

山内公認会計士事務所

2019.09.17
2019.09.24

次の図書を参考にさせていただきました。
（ゼロからわかる指数・対数　2007.12 深川和久著　ベレ出版刊）（指数のはなし上、下
（図解雑学指数・対数　2013.5 佐藤敏明著　ナツメ社刊）　2012.5 大村平著 日科技連刊）

2019.9.30

I. 指　数

1. 指数とは、いくつかけ算されているかということ

つまり、大きな数、2×2×2×2×2 を 2^5 と書き、2 の 5 乗という累乗のこと。
大きな数を表すことに適している。

(1) 世の中は、**かけ算的（指数的、曲線、複利）**に従う傾向にあり、人はそれを**足し算的（直線）**に理解しようとする傾向がある。

現象は複雑であっても大づかみに理解したい

（例）かけ算、指数

国や経済の伸び　—　対前年比○％　　----何倍くらいか

預金やローンの利息　—　金利の計算

指数とは　—　かけ算のくり返し

指数	対数
（複雑）	（単純）
かけ算	たし算
激しい	静か
細かい	大づかみ

AI、デジタル、将来

従って世の中は指数的に変化する傾向にある**（激しい変化の世界）**
しかし、人は足し算的にものを見ようとする**（静かな変化の世界）**

歴史、対数

世の中はかけ算的・指数的（変化・変動）であるのに、人は足し算的（静止的固定的）に勘違いしている。この面において世の中は複雑である。

（大量）

そして、この**指数の逆が対数（単純化）**である。
対数　　　　　　　は複雑なものを単純にしようとする。
そして人の五感はことごとく対数的である。しかし、現実は指数的である。
人の記憶や歴史も対数と深く関係している。だから、過去は対数的
歴史上の出来事は、1 年を 1 とすると、10 年は 2、100 年は 3、1000 年は 4・・・という並び方になるかもしれない。（記憶の量）

過去は会計のようにコンパクトな報告が優れている。（内容も、意義も）　過去は大づかみになる。

対数関数、指数関数の微分

NO.
DATE 2017.10.17 2017.07.18

参考（Excelでまなぶ微分積分 山本将史著 H24.8 オーム社）

1、対数関数の微分

(1) $x = a^y \longleftrightarrow y = \log_a x$

$8 = 2^3$　　　$3 = \log_2 8$

(2) 底がaの場合 $(y = \log_a x)$

$y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \log_a e}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

$a^y = x$

(3) 底が自然対数の底 e の場合 $(y = \log_e x = \ln x)$

$y = \log_e x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$y' = \dfrac{1}{x \log_e e} = \dfrac{1}{x}$

(4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

導関数の定義式 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-fx}{h}$

$$(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)\div\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\log_a\frac{(x+h)}{x}$$

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで $\frac{h}{x}=k$ とおくと

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{x}\log_a e$$

k が 0 に近づくと $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の数 e に近づく

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=2.71828\cdots\cdots$$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$ となり、底を e にすれば、$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$ となる

減衰量の計算

段階状の減衰量

「ある期間」後に α の減衰が生じる　　$1-\alpha$

減衰後の残量

連続状の減衰量

「ある期間」を k 等分し、それぞれに

a/k の率で減衰してゆくと考えると

ある期間後の残量は、　　$\left(1-\frac{a}{k}\right)^k$

α と a の関係は、　　$1-\alpha = \left(1-\frac{a}{k}\right)^k$

そして、k をどんどん大きくした極限は、　　$\lim \left(1-\frac{a}{k}\right)^k = e^{-a}$

従って、α と a の関係は、　　$1-\alpha = e^{-a}$

この関係を、x 期間後の減衰量の式、

に代入すると、　　$y = A\left(e^{-a}\right)^x$

放射性物質、水温のように連続的に減衰する場合の式は、　　$= Ae^{-ax}$

x 期間後の量を表わす関数の形となる。

y：x 期間後の状態

A：スタート時の量

e：指数関数　the exponential function

a：減衰率

x：期間　　　t とすると　　$= Ae^{-at}$

よく使う $\boxed{y=e^{kx}\text{の導関数}}$ y'は

$y=e^{z}$, $z=kx$ とおくと $y'=(e^{z})'=e^{z}$

$y'=e^{z}=e^{kx}$ $z'=k$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=e^{kx}\times k$$

z

$$\boxed{y'=(e^{kx})'=ke^{kx}}$$ となる

たとえば、$(e^{5x})'=5e^{5x}$ となる。

$\boxed{y=3^{x}\text{の導関数}}$

3はeを底にした対数で表わせた。$3=e^{\log_e 3}$だから。

これを使うと 3^x は e をもとにした対数関数で表わせる。

$$y=3^{x}=\left(e^{\log_e 3}\right)^{x}=e^{(\log_e 3)x}$$

$\log_e 3$は定数 1.098…… なので、

$$\boxed{y'=(\log_e 3)e^{(\log_e 3)x}=(\log_e 3)\times 3^{x}}$$

同様に、$y=10^x$の導関数は

$$y'=\log_e 10\times 10^{x}$$

一般に、次の法則が成り立つ

$$(a^{x})'=(\log_e a)\times a^{x}$$

たとえば $(5^{x})'=(\log_e 5)\times 5^{x}$ となる。

PLUS

炭素14の半減期

(1) 炭素14は放射性炭素ともいわれ、半減期は 5,730年 である。

(2) 大気中に含まれる炭素14の割合は一定であり、生きている生物も炭素14の割合は大気中の割合と同じである。

(3) 生物が死ぬと炭素14の供給がなくなり、崩壊だけが続くので、死んだ動植物の炭素14の割合を調べると死んでからの年数が推定できる。

(問1) ある木棺の炭素14の割合を調べたら、75%に減っていた。このとき、この木棺の年代は　　　　r=残存割合

炭素14が1年で r倍 に減少するとして、

この木棺が x年前のものだとすると、

$$r^x = 0.75 \quad \text{また} \quad r^{5730} = 0.5 \qquad \log r = \frac{\log 0.5}{5730}$$

$$x \log r = \log 0.75 \quad \text{—①} \qquad 5730 \log r = \log 0.5 \quad \text{—②}$$

①②より

$$x = \frac{\log 0.75}{\log r} = \frac{5730}{\log 0.5} \times \log 0.75$$

$$= \frac{5730 \times \log \frac{3}{4}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{5730(\log 3 - 2\log 2)}{-\log 2} = 5730 \times 0.4150 = 2378 \text{年前}$$

⑩ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　5-2

xを年減少率として $\left(1-\frac{x}{43年}\right)^{43} \times 100{,}000 = 26{,}100$ (人)

$y = 1-\frac{x}{43}$ とおいて $100{,}000\,y^{43} = 26{,}100$ 　$y^{43} = \frac{26{,}100}{100{,}000}$ 　　⑫

指数関数、対数関数の微積分

$43 = \log_y 0.26100 = \frac{\log 0.26100}{\log y}$ 　$\log x = \frac{\log 26}{43}$

参考にさせていただいた書

　図解雑学　指数・対数　2013.5 佐藤敏明著　ナツメ社刊

　関数のはなし(上)(下)　2012.5 大村平著　日科技連刊

($y=$

$\left(1-\frac{x}{43}\right)^{43} \times 100 = 26$ 　　　H27.10.19

1. 増殖関数

$x^{43} \times 100 = \frac{26}{100}$ 　　$43 = \log_x 26 = \frac{\log 26}{\log x}$

$\log y = \log 0.26100 \div 43$

(1) 複利計算 　$10{,}000円 \times \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ 　年1%を日歩にして …… 27,146円

$\frac{1}{k}$ …… 利率 　, 　k 期間

↓

$10{,}000 \times (1+h)^{1/h}$ 　（$\frac{1}{k}$ を h と置いた場合）

↓

$10{,}000 \times e \fallingdotseq 27{,}182$ 円

?　 差5

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ ではなく $\left(1+\frac{\overset{増加率}{a}}{k}\right)^k$ の場合

$20 \times (1+0.041)^{41} = 103.9$

$\lim_{h\to 0}(1+ah)^{1/h} = e^a$

$20 \times e^{0.41 \times 41} = 107.4$

$1+\alpha = \left(1+\frac{a}{k}\right)^k = e^a$

$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^k = e^a$

$ax = \log_{20e} 105$

$x = \frac{\log 105}{\log 20e} \div a$

(2) 細菌の場合

x期間後の複利 $y = A(1+\alpha)^x$

$1+\alpha = e^a$ 　$\alpha = e^a - 1$ を上記に代入

$y = A(1+e^a-1)^x = A(e^a)^x = \underline{A}e^{ax}$

$105 = 20e^{(41\times 0.0\ldots)}$

$\underline{105} = \underline{20e^{ax}}$

No. Date PLUS

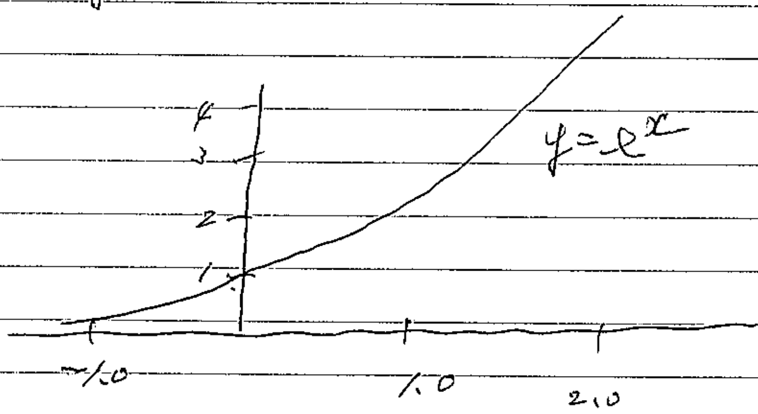
(2) 連続的に複利で増殖を続けて行く現象は、
ある瞬間を基点にして t だけ経過した後の量が t の関数となり、
その関数の形は、

$$y = Ae^{at}$$

$t=0$ のとき $y=A$ を初期条件という

A を 1、$at = x$ とおくと

$$y = e^x$$



1-11

対数を微分する

作成日 作成者 2

W-2

(1) $y=\log_k x$ を微分する

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log_k x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\log_k(x+\Delta x)}^{A}-\overbrace{\log_k x}^{B}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_k\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

対数の法則 (公式 $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$ より)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_k(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \quad ①$$

そのままだと $\log_k(1+\frac{\Delta x}{x})\to\log_k 1\to 0$、$\Delta x \longrightarrow 0$

分子も分母もゼロに近づいてゆく。

そこで

$\frac{\Delta x}{x}=h$ と置く。そうすると

$\Delta x=hx$　$\Delta x\to 0$ なら $h\to 0$ の関係がある

①を書き直すと、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_k(1+h)}{hx}$$

$\to \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}\cdot\log(1+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{h}\log(1+h)\right\}$$ となり

$\frac{1}{x}$ は $h\to 0$ の影響を受けないので前に出し

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_k(1+h)^{\frac{1}{h}}$$ とする

$\frac{1}{h}$ は log の記号の右側へ入れる

$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は

( ) の中はどんどん 1 に近づき

$\frac{1}{h}$ は どんどん大きくなる

作成日　.　.
作成者

先き一

(12) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \boxed{\log_k (1+h)^{\frac{1}{h}}}$ という形は、

$= \frac{1}{x} \log_k e$ となる。

$\boxed{(1+h)^{\frac{1}{h}}}$ が $h \to 0$ の結果、下記の如くになり

① ( )の中はどんどん1に近づいて行く。

② 右肩の $\frac{1}{h}$ はどんどん大きくなっていく。

ほとんど1に近い値①を何百回、何千回と限りなくかけ合せたらどうなるか。①が1に近づく速さのほうが、$\frac{1}{h}$ が大きくなる速さより優勢なら、この答は1に落ちつきそうだし、反対に、$\frac{1}{h}$ の大きくなり方のほうが優勢なら、無限大の値になってしまいそうである。

そこで、h の値を小さくしながら計算してみると

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$	
0.1	2.5937	1.1^10
0.01	2.7048	1.01^100
0.001	2.7169	1.001^1000
0.0001	2.7181	1.0001^10000
……	……	
−0.1	2.8680	
−0.01	2.7320	
−0.001	2.7196	
−0.0001	2.7181	
……	……	

( )の中が1に近づくのと、( )のべき数が大きくなるのが、微妙にバランスして、e に落つく。

$(1+0.0001)^{1000} = 2.7181……$

精密に計算するとこの値は

2.718281828459 ……

この値を、"e" と呼ない

$\boxed{\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$ と書く。

作成日　．．
作成者

(3) すなわち 対数の微分は、

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_k x = \frac{1}{x}\log_k e}$$ となった

（適比使い物計）

底を2にする　$\log_2 x$　コンピュータ理論や情報処理理論

底を10にする　$\log_{10} x$　常用対数、複利計算等

底をeにする　$\log_e x$　自然対数、記号を使った数式の展開等

そして、この3種の表わし方は、

$$\log_e x = 2.30 \log_{10} x$$

$$\log_2 x = 3.32 \log_{10} x$$ となる

今後 $\log_e x$ は $\log x$ とする。

(4)　(2)の式

$$\frac{d}{dx}\log_k x = \frac{1}{x}\log_k e$$ において

kのかわりにeを使うと

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\log_e e$$ とすると

$\log_e e$ は1なので

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}}$$ となる