第4回　非上場株式の評価

(相続税の概要)

2019.9.24

会計と経営のブラッシュアップ
平成29年1月2日
山内公認会計士事務所

本レジュメは、相続税法とその通達及び次の各書を参考にさせていただいて作成した。
(取引相場のない株式の税務　森富幸著　2008.10日本評論社刊) (時価評価と実務　辻・本郷税理士法人編　H21.9税務経理協会刊)
(非公開株式譲渡の法務・税務　牧口晴一　2012.8中央経済社) 相続税・贈与税の重要テーマ H31.3 税務出版 武田秀和著

Ⅰ．相続税改正の概要（2005.1.1以後の相続等）

1．見直しの背景

(1) 最高税率の引上げ等

最高税率　50%→55%

基礎控除　現行の60%

(2) 相続税課税数

死亡者の約4%と減数傾向
地価と基礎控除のアンバランスによる改正

(3) 地価の変化と基礎控除

(全国平均)
1983(100%)　―　1991(200%)　―　2013(85%)
(三大商業地)
1983(100%)　―　1991(337%)　―　2013(50%)　―　2015(55%)
2,000万円＋400n 万円　―　4,800＋950n　5,000＋1,000　―　3,000　＋　600n
最高税率75%　―　70%

(4) その他

① 未成年者控除　　20歳までの1年　6万円→10万円
② 障害者控除　　85歳までの1年　6万円→10万円　(特別障害者は2倍)
③ 小規模住宅の特例見直し　改正前上限240㎡→330㎡等

1. 相続人とは、

(1) 法定相続人

① 配偶者（戸籍上の婚姻関係） 1/2 2/3 3/4

② 子（代襲相続人、孫、曽孫など）（養子） 血族 1/2

③ 直系尊族 ②がいないとき 〃 1/3

④ 兄弟姉妹 ②、③がいないとき 〃 1/4

※ 配偶者の連れ子は相続人となれない

⑤ 養子 相続税の計算上 実子がいる時は1人、いないとき 2人まで。

(2) 相続財産

① 包括承継

② 遺産分割対象財産

③ 祭祀

④ 債務（相13 債務は含まれない）債権者の立場

(3) 名義株の問題

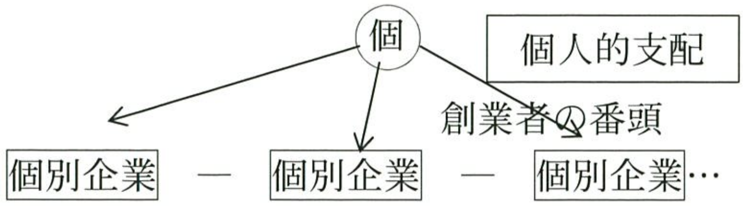
(4) 死亡退職金の問題

事業の承継について
（創業者と二代目）

(H27.07.20)
(H27.06.26)

1. 創業者の何を承継するのか

創業者



二代目

創業者の発想のシステム化
企業グループを支配
システムとして確立
物的なもの以外の承継

2. 承継者（二代目）の役割

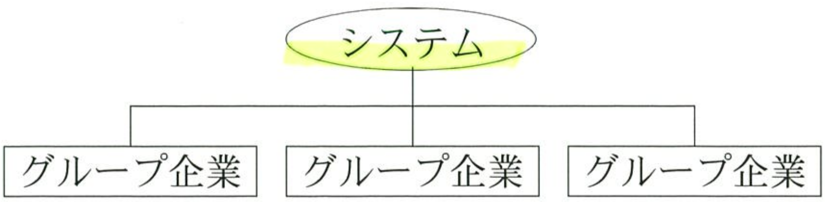
企業の体系的な承継

個人から企業へ、そのシステム化

徳川秀忠は、幕府の組織確立の面で家康以上と言われた

システム化

(1) 創業者の発想のシステム化とシステムとしてのグループ支配
（個性の引継はできない）



(2) 自分の事業の模索
基礎の上に自分は何をするのか
これからが本当のテーマ

(3) 創業者の生前は、企業を物として引継ぎ、その戦略や人的財産や外部とのつながりは引継ぐことができる。しかし、創業者の死亡によって、それらのものは、存在しても引継いだとは言えず、引継ぐべきは、創業者の精神であり、その発想のシステム化、残された物（企業）のシステム支配の確立である。

3. 自分の事業とは

創業とは別の物、家業の承継を超えた本当の承継と発展

創業者
時
間
二代目

創業者の強味と限界

(H27.06.29)

創業者の強味と限界は、“**企業、会社の個別支配**”であり、“**企業の組織化とシステム化の欠如**”である。
創業者のスタッフは、番頭的な域を出ず、創業者の使者であって、それ以上でなく、組織人であることは少ない。
2 代目は、創業者の跡を追うだけでは、条件的に不利で、充分ではない。
2 代目しか出来ないことをなすべきである。
従って、組織化、システム化の実をあげ組織としての企業群を先導して行かなければならない。

徳川家康が個人的実績と才能によって、大名を統治したように、二代目の秀忠は組織とシステムにより大名を統治する必要がある。
家康の発想とその支配したものをシステム化し、幕閣として組織化する必要があった。
組織とシステムとは、ある意味で官僚システムであり、良い意味での機動的で柔軟な官僚組織を持つ必要がある。
天下を統一した始皇帝及びその後継者の失敗は、有効な官僚組織を育成できなかったことも原因の一つであるかもしれない。

二代目は、創業者の何が引継げるのかを理解し、二代目独自の引継を考えなければならない。そのキーワードは**システム化**である。

相続と債務控除

・（相続税と常識（民法との違い））

・（遺産と債務は別の行動）　下

相続における債務の引継（と債務控除）は、見える遺産に目が行き、見えにくい債務を忘れがちになるようだ。しかし、相続税の上で債務控除の可否は、影響が大である。

（１）債務の引継は、原則として法定相続分等により行う

この場合、不動産・預貯金等の積極財産の分割との関連は原則としてなくなる。実務上は、遺産分割協議書により分割しているが、法的には有効ではない。

（２）後日明らかになった債務

従って、遺産分割終了後に明らかになった債務は、遺産とは関係なく法定相続分等により負担しなければならない。

（３）マイナスの遺産分割は通算できない

遺産分割によって、債務の負担者の相続税の課税価格がマイナスになっても、そのマイナスを他の納税者の課税価格から差引くことは認められない。

（４）建設中の建物の借入金

建設中の建物の相続人とその建設のための銀行借入金がある場合も、財産に直接付随する債務とは言え別である。銀行の同意を得て債務者の名義を確定する必要がある。

（５）保証債務と連帯保証債務

相続（引継）はするが、原則として債務控除は出来ない。保証債務等は、相続開始日において、主たる債務者が資力喪失等により弁済不能であり、保証債務等を履行しなければならず、かつ返還も見込めない場合にのみ債務控除ができる。

（６）無限責任社員の地位の引継ぎと債務控除

無限責任社員としての責任が相続されるので、債務を確定するには相続前の会社清算しかない。しかし、定款に、無限責任社員の地位の引継ぎに言及していない場合は、死亡による退社時に持分の清算が行われ債務控除ができる。

（７）限定承認と相続放棄

相続人は、相続財産をゼロとしたとしても、上記のように債務を免れることはできないことが多い。

そこで、被相続人の債務を明確にできず、多額の債務があると思われるときは、「限定承認」と「相続放棄」を選択すべきである。

合名会社等の無限責任社員の会社債務についての債務控除の適用

【照会要旨】

合名会社、合資会社の会社財産をもって会社の債務を完済することができない状態にあるときにおいて、無限責任社員が死亡しました。
この場合、その死亡した無限責任社員の負担すべき持分に応ずる会社の債務超過額は、相続税の計算上、被相続人の債務として相続税法第13条の規定により相続財産から控除することができますか。

【回答要旨】

被相続人の債務として控除して差し支えありません。

(注) 合名会社の財産だけでは、会社の債務を完済できないときは、社員は各々連帯して会社の債務を弁済する責任を負うとされ(会社法580)、退社した社員は、本店所在地の登記所で退社の登記をする以前に生じた会社の債務に対しては、責任を負わなければならない(会社法612①)とされています。

【関係法令通達】

相続税法第13条第1項
会社法第580条、第612条第1項

注記
平成26年7月1日現在の法令・通達等に基づいて作成しています。
この質疑事例は、照会に係る事実関係を前提とした一般的な回答であり、必ずしも事案の内容の全部を表現したものではありませんから、納税者の方々が行う具体的な取引等に適用する場合においては、この回答内容と異なる課税関係が生ずることがあることにご注意ください。

き公租公課に異動が生じたときは、当該課税価格及び相続税額について、更正を要するのであるから留意する。(昭46直審(資)6、昭47直資2－130改正、平15課資2－1改正)

(保証債務及び連帯債務)

14－3　保証債務及び連帯債務については、次に掲げるところにより取り扱うものとする。(昭57直資2－177改正、平15課資2－1改正)

(1) 保証債務については、控除しないこと。ただし、主たる債務者が弁済不能の状態にあるため、保証債務者がその債務を履行しなければならない場合で、かつ、主たる債務者に求償して返還を受ける見込みがない場合には、主たる債務者が弁済不能の部分の金額は、当該保証債務者の債務として控除すること。

(2) 連帯債務については、連帯債務者のうちで債務控除を受けようとする者の負担すべき金額が明らかとなっている場合には、当該負担金額を控除し、連帯債務者のうちに弁済不能の状態にある者(以下14-3において「弁済不能者」という。)があり、かつ、求償して弁済を受ける見込みがなく、当該弁済不能者の負担部分をも負担しなければならないと認められる場合には、その負担しなければならないと認められる部分の金額も当該債務控除を受けようとする者の負担部分として控除すること。

(消滅時効の完成した債務)

14－4　相続の開始の時において、既に消滅時効の完成した債務は、法第14条第1項に規定する確実と認められる債務に該当しないものとして取り扱うものとする。(平15課資2－1改正)

(相続時精算課税適用者の死亡により承継した相続税の納税に係る義務の債務控除)

14－5　特定贈与者の死亡以前に当該特定贈与者に係る相続時精算課税適用者が死亡したことから法第21条の17の規定により当該相続時精算課税適用者の相続人(包括受遺者を含み、当該特定贈与者を除く。以下14－5において同じ。)が当該相続時精算課税適用者の有していた相続時精算課税の適用を受けていたことに伴う納税に係る権利若しくは義務を承継した場合において、又は贈与者の死亡前に相続時精算課税選択届出書を提出しないで受贈者が死亡したことから法第21条の18の規定により当該受贈者の相続人(包括受遺者を含み、当該贈与者を除く。以下14－5において同じ。)が当該受贈者の有することとなる相続時精算課税の適用を受けることに伴う納税に係る権利若しくは義務を承継した場合において、その承継した納税に係る義務は、当該相続時精算課税適用者又は当該受贈者の死亡に係る当該相続時精算課税適用者の相続人又は当該受贈者の相続人の相続税の課税価格の計算上、債務控除の対象とすることはできないことに留意する。(平15課資2－1追加)

8－2 持分会社の社員

1【社員の責任】

1．無限責任社員の責任(会法580①)

無限責任社員は、以下の場合には、連帯して、持分会社の債務を弁済する義務を負う。

⇒ 直接無限連帯責任かつ二次的責任。

①持分会社の財産をもってその債務を完済することができない場合
②持分会社の財産に対する強制執行が効を奏しなかった場合
(社員が、その持分会社に弁済をする資力があり、かつ、強制執行が容易であることを証明した場合を除く)

2．有限責任社員の責任(会法580②)

有限責任社員は、その出資の価額(既に履行した出資の価額を除く)を限度として、持分会社の債務を弁済する責任を負う。

⇒ 直接有限責任。

※ 合同会社の有限責任社員は、原則として会社の成立前に出資を履行しなければならないので、形式的には直接有限責任であるが、実質的には間接有限責任となる(会法578、会法604③)。

3．社員の抗弁(会法581)

会社が債権者に対して抗弁事由を有するときは、社員もその責任追及に対し、その抗弁事由を援用することができる。

4．社員の出資に関する責任(会法582)

出資の目的が金銭である場合に、その出資をすることを怠ったときは、その社員は、その利息の支払のほか、損害の賠償をしなければならない。

また、債権である場合に、その債権の債務者が弁済期に弁済をしなかったときは、その社員は、その弁済をするほか、利息を支払、損害の賠償をしなければならない。

5．社員の責任の変更(会法583)

(1) 有限責任社員が無限責任社員になった場合(会法583①)

無限責任社員となる前に生じた持分会社の債務について、無限責任社員としての責任を負う。

(2) 合資会社の有限責任社員が出資の価額を減少した場合(会法583②④)

その登記前に生じた持分会社の債務については、従前の責任の範囲内で弁済する責任を負う。なお、その登記後２年以内に請求または請求の予告がなければ債務は消滅する。

(3) 無限責任社員が有限責任社員になった場合(会法583③④)

その登記前に生じた持分会社の債務については、無限責任社員として弁済する責任を負う。なお、その登記後２年以内に請求または請求の予告がなければ債務は消滅する。

6．無限責任社員となることが許された未成年者(会法584)

社員の資格に基づく行為に関しては、行為能力者とみなす。

2【入退社に伴う社員の責任】

1．加入社員の責任(会法605)

持分会社の成立後に加入した社員は、その加入前に生じた会社の債務についても、これを弁済する責任を負う。

2．退社した場合の責任(会法612)

退社した社員は、その旨の登記をする前に生じた持分会社の債務について、従前の責任の範囲内で弁済する責任を負う。

なお、その登記後２年以内に請求(または請求の予告)がなければ、債務は消滅する。

3【持分の譲渡と制限】

1．持分の譲渡（会法585①②③）

社員は、他の社員全員の承諾がなければ、その持分の全部（または一部）を他人に譲渡することができない。

ただし、業務を執行しない有限責任社員は、業務を執行する社員の全員の承諾があるときは、その持分の全部（または一部）を他人に譲渡することができる。

<table>
<tr><th></th><th>業務を執行する社員</th><th>業務を執行しない社員</th></tr>
<tr><td>無限責任</td><td colspan="2" rowspan="1">他の社員全員の承諾</td></tr>
<tr><td>有限責任</td><td>定款で別段の定め可（会法585④）</td><td>業務を執行する社員全員の承諾</td></tr>
</table>

なお、業務を執行しない有限責任社員の持分の譲渡に伴い定款の変更を生ずるときは、その持分の譲渡による定款の変更は、業務を執行する社員の全員の同意によってすることができる。

2．持分の全部を譲渡した社員の責任（会法586）

持分の全部を他人に譲渡した社員は、その旨の登記をする前に生じた持分会社の債務について、従前の責任の範囲内で弁済する責任を負う。

なお、その登記後２年以内に請求（または請求の予告）がなければ、債務は消滅する。

3．制　　限（会法587）

持分会社は、その持分の全部（または一部）を譲り受けることができず、持分会社がその持分を取得した場合には、その持分は、持分会社がこれを取得した時に消滅する。

4【誤認行為の責任】

1．責任を誤認させる行為があった場合

(1) 合資会社の有限責任社員が自己を無限責任社員と誤認させる行為をした場合（会法588①）

その誤認に基づいて会社と取引をした者に対し、無限責任社員と同一の責任を負う。

(2) 合資会社・合同会社の有限責任社員が責任の限度を誤認させる行為をした場合（会法588②）

その誤認に基づいて会社と取引をした者に対し、その誤認させた責任の範囲内で会社の債務を弁済する責任を負う。

2．自称社員

(1) 無限責任社員と誤認させる行為をした場合（会法589①）

持分会社の社員でない者で、自己を無限責任社員であると誤認させる行為をした者は、その誤認に基づいて会社と取引をした者に対し、無限責任社員と同一の責任を負う。

(2) 有限責任社員と誤認させる行為をした場合（会法589②）

持分会社の社員でない者で、自己を有限責任社員であると誤認させる行為をした者は、その誤認に基づいて会社と取引をした者に対し、その誤認させた責任の範囲内で会社の債務を弁済する責任を負う。

二代目が伸ばす会社

参考：（久保田章介著 二代目が潰す会社、伸ばす会社）
（小出宗昭著 ビジネスコンサルティング）

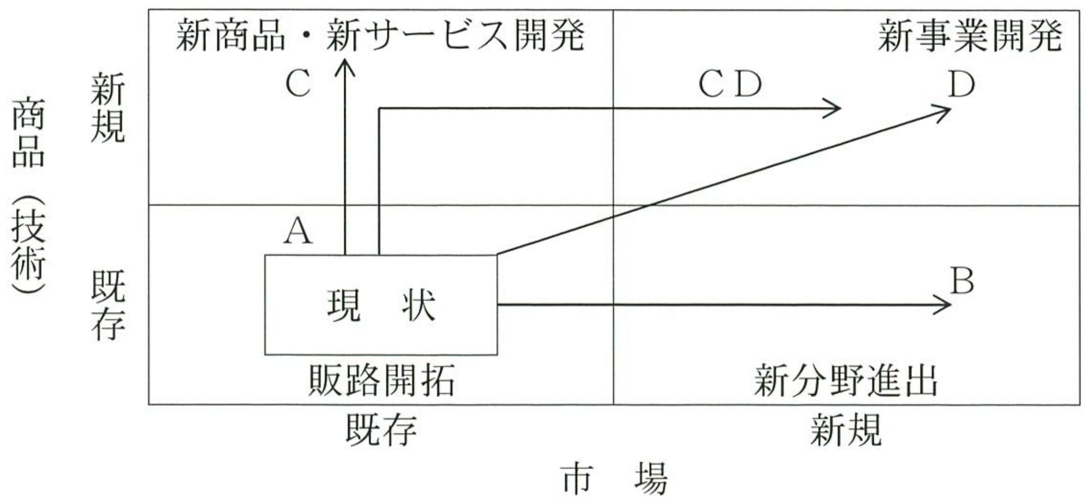
1. 後継者の役割と能力

(1) 会社を潰さないこと
(2) 社員の力を結集すること
(3) 引継事業の新しい発展を図ること

2. 自社の経営リスクの把握と対処

求心力のある社員から信頼される後継者
(1) 資金管理－理解し、体感する
(2) 損益管理－人的活性化（やる気）と育成
(3) 新しい発展の方向づけ－社員の共感
(4) 明確で安定した経営方針－的確な経営判断
(5) 時間の有効管理－忙しすぎない

3. 経営システムとは



創業者も二代目も居なくても、会社の経営がやって行ける仕組

付表１

2．評価方式の決定要因

評価方式は　①　評価会社が一般の会社か特定の会社かという**会社の態様**と
②　評価対象の株主が同族株主のいる会社の**同族株主か否か等の２つの態様**により、原則評価方式か特例的評価方式か**決定する**こととしています。

①　株主の態様 ─┬→ ㋑同族株主のいる会社のどの株主か
　　　　　　　　└→ ㋺同族株主のいない会社のどの株主か
②　会社の態様 ─┬→ ㋑一般の評価会社か
　　　　　　　　│　（これは会社規模により大会社、中会社、小会社の３つに区分される）
　　　　　　　　└→ ㋺特定の評価会社か
　　　　　　　　　　（これは資産の保有状況、営業の特異な状態等により６つに区分される）

4．同族会社株式の評価の体系

評価会社が一般の会社か特定の会社かにより、また同族株主等か否かにより評価方法が決められています。この概要を図解すると下記の通りになります。

評価会社の区分				評価方式	備考
一般・特定の別	規模区分と特定会社区分	株主等の区分	原則・特例の別		
一般の評価会社の株式	大会社	同族株主等	原則的評価方式	類似業種比準価額方式	純資産価額方式も選択可
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
	中会社	同族株主等	原則的評価方式	類似業種比準価額方式と純資産評価価額方式の併用方式	純資産価額方式も選択可
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
	小会社	同族株主等	原則的評価方式	純資産価額方式	類似業種比準価額方式と純資産価額方式との併用方式も選択可
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
特定の評価会社の株式	比準要素数１の会社	同族株主等※	原則的評価方式	純資産価額方式	Ｌの割合を0.25とする類似業種比準価額方式と純資産価額方式との併用方式も選択可
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
	株式保有特定会社	同族株主等※	原則的評価方式	純資産価額方式	S1＋S2方式も選択可
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
	土地保有特定会社	同族株主等※	原則的評価方式	純資産価額方式	
		その他	特例的評価方式	配当還元方式	
	開業後３年未満の会社等	同族株主等※	原則的評価方式	純資産価額方式	
		その他　※	特例的評価方式	配当還元方式	
	開業前又は休業中の会社			純資産価額方式	配当還元方式は適用できない
	清算中の会社			清算分配見込額を基に複利現価計算により求めた価額	配当還元方式は適用できない

笹岡宏保『財産評価の実務Ⅱ』（清文社）を参考に作成

金融政策
2019.07.22
2019.08.19
2019.08.26
2019.09.02
2019.09.24

非伝統的金融政策の経済分析

竹田陽介 矢嶋康次著 2013.11 日本経済新聞

1. 全般

(1) 1999年2月の日銀によるゼロ金利政策の導入以来
現実的な、実用的な
世界は プラグマティックな対応、非伝統的な金融政策の
発動を余儀なくされてきた

(2) 非伝統的な手法が採用されて10年以上経過(1999-2012)
したが、金融政策上の効果はどれほどあったかの実証検証分析
の必要性
(資産価格の上昇に効果は見られない)

(3) 2012年の政権交代
(デフレ脱却はまだ行われていない)

(4) 日本はじめ欧米諸国で実施されてきた非伝統的金融政策を
見ると、貨幣という象徴的価値の適切な供給の中で、中央銀行という
専門家集団による知性の結晶が、個人の能力の下で実行に移され
てきたように映る。(しかし、日本のデフレ脱却に成功はずれか?)

(5) それはあたかも、重病患者の治療にあたる医師が、治療薬の投与
の効果の検証を通じて、治療方針を漸次変えていくように、
定見に拘らず、プラグマティックな政策判断に従って、漸進的に展行
されてきた。(この政策の変更が抜本的ではない?)

(6) 非伝統的金融政策は、リアル社会における壮大な社会実験ともいえる
効果が見られない

(7) デフレの真因は、将来の不安が消費を控えさせ、設備や設備
投資に消極的になる負の富効果にある
高齢化や経済の
これは、沖縄経済における生産性(アウトプットと資源とインプットの非効率
性さえも作っている感じがする。

2、国破れて中銀あり

(1) 中央銀行の近未来像について。 経済学から俯瞰する

中央銀行の近未来像とは、どんなものか？

(2) 本書のコンセプト 「金融深化」Financial deepening
をキー・コンセプトとする

何を買うか、どれほど買うか、

(3) 中央銀行は、「最後の買い手」として
リスク資産市場を積極的に育成する必要がある。

この点に関して
FTPL、MMTは
不適当か、

(4) 金融政策と資産価格形成の問題

(5) 金融政策の伝統とは、何を意味するのか
"資産価格にもたらす短期的な効果ではないか"？

(6) 短期的な視点
非伝統的金融政策の類型 とその効果

(7) 長期的な視点と中央銀行の近未来像
長期的な問題、マクロショック
少子高齢化
地震など自然災害

デフレーション

1990年代後半以降、日本において顕在化したデフレーションについて考える際、
1930年代の大恐慌の教訓が想起される。

日本経済が1990年代後半以降、陥ってきた「流動性の罠」とは、利子率が下限に
あることを誰もが知っており……

この下においては、金融政策の効果は発揮されない

3、金融市場との対話、リアルタイムの政策評価

(1) 日銀 展望レポート等 1998年へ による経済見通し

(2) サブプライムローン、リーマンショック時の
ジョン・テイラー スタンフォード大教授による「ブラック・スワン」
サブプライムローン危機が表明化した 2007.8 時点において、
いくつかの利子率スプレッドが高騰した
次頁図表参照

(3) 日銀の1900年代の金融政策の変遷
図表参照
1995年7月からは、公定歩合から無担保コールレートに
操作目標として役割がシフトした。
金利による従来の金融政策が限界に差しかかる中、日本銀行は
非伝統的な領域に突入して行く

(4) 速水総裁時代：ゼロ金利政策から量的緩和へ（98/3－03/3）
新日銀法が1998年スタート。98年9月には無担保コールレートを
0.25%に引下げ、99年2月には「ゼロ金利政策」を導入した。
政策目標は、金利から量に変更された。

(5) 福井総裁時代：量的金融緩和の強化（03/3－08/3）
日銀当座預金の拡充 5兆円 → 35兆円

(6) 白川総裁時代：包括的金融緩和（08/3－13/3）
2008.9 リーマンショック 2011.3 東日本大震災

(7) 黒田総裁時代：量的・質的金融緩和政策（13/3 ― ）
2%の物価上昇目標を2年程度で達成

6、資産バブルに対する考え方　バーナキン議長　2002年

(1) FRBの資産バブルに対する考え方には二つある

(2) 第一は "lean-against-the-bubble strategy"
(徒始末戦略　バブルは崩壊するまで放っておく戦略)

(3) 第二の考え方は、"aggressive bubble popping"
(バブルに逆らう戦略)
徒始末戦略は危険である

(4) サブプライムローン危機後の批判
ムッサ氏　バブル破裂による「負債デフレ」の状況を生み出す危険性もある。

(5) グリーンスパン氏は、
タイミングよくバブル退治ができるという主張は、FRBに対する幻想である

バブルがはじける前に、金利を上げて、投資の過熱を防げばよい、
というけれども、それが出来れば易しいこと……
しかし、バブルははじけてからこそバブル……

それが出来た例は……

"タイミングよくバブル退治ができる"という主張は、中央銀行に対する"幻想"である。

7. 非伝統的金融政策の類型

(1) 非伝統的金融政策は、伝統的な政策手段であった超短期の銀行間貸借市場における金利がゼロの下限制約に直面した下での金融政策である。

(2) 第一は、ゼロ金利政策である。（マイナス金利）
第二は、量的緩和政策である（バランスシートの拡大）
第三は、信用緩和政策である（長期国債の購入）

これで充分とは言えない

(3) こうした中では、中央銀行の機能は、金融機関の資金流動性を含めて「最後の貸し手」ではなく、金融資産の市場流動性を含める「最後の買い手」と呼ばれる

中央銀行は何を買うべきか

非伝統的金融政策の効果

(1) 資産として満たす条件

健全性、流動性、中立性

(2) あるべき中央銀行の近未来像

4 日本銀行の金融政策の質的な転換

(1) 90年代以降の日銀の金融政策は、
ゼロ金利政策、時間軸効果、量的緩和政策の導入、
包括的金融緩和 — という歴史上稀に見る変化であった。

その過程において、日銀は政策のコミットメントの強化を意図してきた。
このことは、金融政策が金融市場に対して働きかける
メカニズムの質的な転換を意味する

Fed View

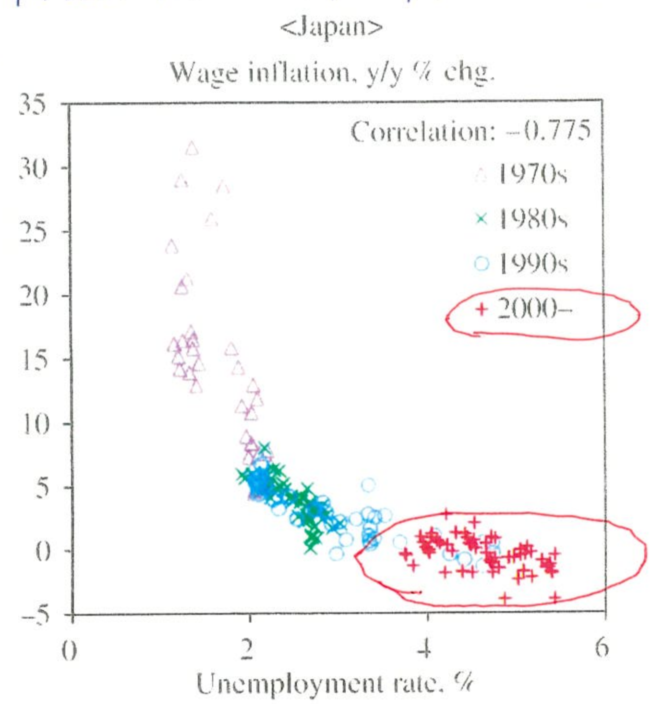
バブル識別の困難性、後始末の効率性を内容とする
グリーンスパン主義

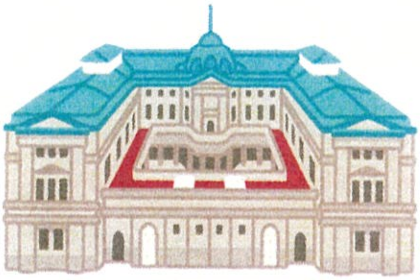
BIS View (aggressive bubble poping)

中央銀行として掲げる雇用と物価という二つのマクロ経済の目標に対して
資産価格の変動が及ぼす影響を注視すべきだとする

「最後の買い手」でもある中央銀行が、金融資産の市場流動性を高め、
投資家のリスク許容度を下げ、流動性プレミアムのみならず、信用スプレッドを
引下げることを金融政策
に期待する

何故デフレからの脱却が
できないのか





デフレ・FTPL・MMT
(デフレ脱却に向けて)

(8月のごあいさつ)
2019年9月1日（日）

アベノミクスは、デフレ脱却の**物価上昇目標2%**を目指したが、未だ道半ばである。2%という物価の上昇を行おうとすれば、第一に必要なことは消費の拡大である。従って、**消費税の引き上げ**は、逆に消費にブレーキをかけ、**デフレ脱却の反対方向の施策**である。

1990年代後半以降、日本において顕在化した**デフレーション**について考えるとき、1930年代の大恐慌の教訓が想起される。そのとき救世主となったのはケインズの**有効需要の原理**であった。日本経済が、1990年代後半以降、陥ってきた**「流動性の罠」**とは、利子率が下限にあることを誰もが知っており、この下においては、**金融政策の効果**は発揮されなかった。

FTPL(物価水準の財政理論 Fiscal Theory of the Price Level)の基本は、名目国債残高を、現在の物価水準で割った値が、将来にわたる実質財政余剰の現在価値の期待値に等しいという式で表される。

名目国債残高／現在の物価水準＝実質財政余剰の現在価値

増税の延期によって、右辺の財政余剰が減少すると、左辺も減少しなければならない。ところで名目国債残高は所与なので、物価が上昇することになり、**デフレ解消へ向かう力**が生じる。このことがシムス教授などが話された、先ず、日本の2%のインフレを達成後に消費増税を行うべきだという考えになるのではないか。

MMT(現代貨幣論 Modern Monetary Theory)は、通貨発行権を持つ国家は、債務返済に充てる**貨幣を自在に発行**できるため、財政赤字で国は破綻しないと説く。完全雇用と物価安定を達成するには**金融政策**ではなく、**財政政策**への依存度を高める必要がある。インフラや教育、研究開発に**投資**して、**国の長期的な潜在成長率**を高めるべきであるとする。理論の構築や経済の多様性の配慮の違いはあるが、消費増税のマイナス効果や誤った**財政政策**という意味では、上記のFTPLと同じ面を感じる。

日本のデフレ解消の政策は的はずれで政策に根本的な誤りがあったのか？**デフレとは需要不足であり、その真因**は、将来の不安(経済不調、少子高齢化、天災…)に対し、国民の消費や設備投資に消極的な負の需要ショックに真因がある。経済の活性化、効率化へ向けた強力な政策とともに、国民の意識を変えるような**前向きの明るさ、意識の変革**が国、個人とも必要ではないか。これは、**沖縄経済における生産性**(アウトプットの貧弱とインプットの非効率さ)を前向きに改善すべき**活性化、効率化の必要性**にも似ている感じがする。

第 87 回勉強会
(2019 年 8 月 28 日)

金融と財政の曖昧な政策割当

講　師　上智大学経済学部経済学科　教授　竹田陽介氏
紹介者　元日銀那覇支店長　水口毅氏 (参加者 29 名)

「昨今もて囃されるMMT (Modern Monetary Theory、現代貨幣理論) の流行に見られるように、伝統的な金融政策は無力化し、財政規律の箍は緩み解ける現状がある。財政当局と中央銀行が統合された政府の予算制約の下で、金融政策と財政政策の各政策に割り当てられる目標および手段が、曖昧になっている。両政策を繋ぎ、それらの整合性を図る国債管理の役割が、益々増大しつつある。

本講演では、財政金融政策に対する伝統的な経済学の考え方を振り返り、現在直面する問題点を指摘する。さらに、求められる新しい見方の萌芽について議論したい。具体的には、中央銀行の独立性、国債管理、マイナス金利政策、金融政策の正常化、財政赤字の政治経済学などについて触れる」、とのことで充実したレジュメを作成していただきご講演をしていただいた。

最初に、危機時において、「金融政策と気候変動の問題は似ている」との国際協調の必要性の話、アルゴアの気候変動の重要性に対し、人類共有の問題として協調が必要であるが、トランプの言動は驚くべきものがある。金融政策については、リーマン以後の金融危機時の国際通貨制度の安定性の回復は、各国の通貨切下げ競争など協調性を欠いている面もあり、加えてトランプのアメリカ第一主義が影を落としている。

現在の経済停滞について、「高圧経済？」が必要かもしれない点を、1970 年～2000 年代の Wage inflation の米国と日本のフィリップス曲線の対比で、日本の 2000 年代の金利がゼロのレベルではりついている状況に対し、中央銀行の非伝統的金融政策として、目的を、(a)インフレ期待に働きかける、(b)金融機関のリスクテイクを促す、また、手段としては(1)マイナス金利、(2)バランスシートの拡大、(3)長期国債の購入であった。ところが、これに対するデフレ脱却の効果は見られず、これはどういうことなのかの質問があった。これに対して先生のご意見は、MMT による財政支出の拡大は議論の余地があり、これらの手段等以外のイノベーション等による違った観点からの施策が必要でないか、それは 3 つの手段に加えて、向上、活性化に向けた、明るさ、前向きの改革への意識ではないかとのご指摘があった。これは意識の変化が具体的な施策に及ぼすプラスの効果の示唆とも感じた。

先生の著書、「非伝統的金融政策の経済分析」(2013 年日本経済新聞社、第 54 回エコノミスト賞受賞)は、1999 年 2 月の日本銀行によるゼロ金利政策の導入以来、世界の中央銀行は、従来行われてきた金融政策の枠を超えた非伝統的な金融政策の発動を余儀なくされている。この 10 年余の金融政策における効力について論ぜられたもので、タイミングの良い実証的な経済分析であった。この非伝統的金融政策を、人口減少や自然災害などのマクロショックに直面する現代の中央銀行の課題に対する壮大な社会実験との観点から論ぜられ、興味深いものがあった。更に先生は、この続編とも言うべき、更にこの 6 年間の分析書も計画しておられると聞いた。

(第　回) FTPL、MMT、デフレ

2019.09.02
2019.08.24

物価水準の財政理論
FTPL

プリンストン大学シムズ教授
(ノーベル経済学賞受賞者)

もし、その国の国債の債権者のほとんどがその国の者であるならば、財政赤字を一種の規律をもって無視し続けたなら、①物価は緩やかに上昇(インフレーション)し、それが常態化することで②財政赤字は実質目減りする。これは国債償還による財政再建よりはるかに効率的である、とするものである。

これは、将来に向って財政再建を放棄することによって、現在のインフレ率を高めることが目的とされている。
その基本は、名目国債残高を現在の物価で割った値が、将来にわたる実質財政余剰の現在価値の期待値に等しいという関係式である。

名目国債残高/今期の物価水準＝実質財政余剰の現在価値の期待値

ここで、財政余剰とは、「政府収入－政府支出－支払利子」であり、基礎的財政支出に近いものだ。
P/L 的に言えば、経常利益と営業利益の差のようだ。

邓小平、

現代中国を理解するための必読書

中国を理解するための必読書　[illegible]・エズラ・ヴォーゲル

経済学③

2019.08.24

現代貨幣理論
(MMT)

Modern Monetary theory

1. 自国通貨建の国債は破綻しない
2. 政府の負債は国民の資産
3. 銀行は貸出によってお金を作ることができる
4. お金は物ではなくて情報(経済力に裏付けされた)
5. 日銀は、2013 年から 6 年間で 400 兆円の国債を買取り、2016 年には金利の引き下げも行ったが 2%の物価上昇は達成できなかった。
6. 一旦、インフレ傾向になりかけたが、2014 年の消費増税でまた下がった。
7. MMT　modern monetary theory
8. インフレの原因を明確にして、それに対応できれば問題はない。
   インフレ＜所得増加なら OK

日本がデフレ対策ができなかったのは何故か？

(1) 政府債務が過大であったからか

(2) だから需要拡大　ができなかった

〃 財政支出の拡大　〃

〃 減税　〃

(3) 要は、財政支出ができなかった。

↓

だからMMTの議論が必要なのではないか

FTPL

9. MTT

(1) 自己通貨を持つ政府は、財政的な予算制約に直面することはない
— 国債をいくらでも発行できるし、それによって破綻することはない

(2) 全ての経済及び政府は、<u>生産と需要について物あるいは環境的な限界がある</u>
— 急激なインフレにならない限りは限界はない

(3) 政府の赤字は、他の経済主体の黒字である
— 政府の借金や支出は、国民の財産や収入となる

連結 B/S

資　産	負　債
0	0

紙幣を発行して返済する必要もない

(4) 連　結

政府の B/S

	負　　債
	国債 1,000 兆円

日銀の B/S

資　　産	負　　債
国債 1,000 兆円	民間銀行からの債務 1,000 兆円 (国債の買取分)

日本政府は、その返済能力に限界はない!!
理由は、借金の返済に必要な通貨を発行しているのは政府だから、

政府の財政赤字は、それと同額の民間部門の貯蓄を生み出す。

政府の財政赤字は民間部門の貯蓄によってファイナンスされているのではない。

信用貨幣論によれば、
資金量の制約はないが、借り手の返済能力という制約はある

2019.09.24
2019.09.09
2019.09.02
2019.08.19
2019.06.17
2018.10.23

微分方程式

平成 29 年 7 月24日

参考図書（Excel で学ぶ微分積分　山本将史著　H24.8 オーム社）
（すぐわかる微分方程式 石村園子著 1997.8 東京図書刊）
（微積分のはなし 大村平著 1985.3 日科技連刊）
（Excel で学ぶ微分方程式　鈴木肇著　H18.2 オーム社）

1．将来予測

⑴ 化石－放射性元素

半減期 y^1=-ky
減る速度 y^1 は、現在量 y と比例する。
これを積分すると、現在量 y が求められる。$y=C\cdot e^{-ky}$

⑵ 刺激と反比例などの微分方程式

① 刺激が変化するとき、その変化に対する敏感度は、もとの刺激の大きさに反比例する。（ポルノ映画の製作会社）、前作より 1 割以上の興奮度
② 台風の進路予想　ベクトル（その点で進むべき方向と速さ）
③ 解曲線（ベクトルを接線として持つような曲線）
④ 風の流れ、民族の大移動

⑶ 限界速度

落下物は空気の抵抗がないものとすると、落下距離の√に比例して落下速度が増大する。
ビルの屋上から落したリンゴの質量を m とすると、その作用している引力は mg(g は、地表付近の物体を引きつける重力の加速度で 9.8m/sec² である。)

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$　　$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面へ向う速度の変化率（加速度）

しかし、空気抵抗が落下をやめさせる方に作用する。
空気抵抗の強さは物体の速度が比較的遅いうちは速度にほぼ比例し、物体の速度が速くなると速度の 2 乗に比例する。
従って、空中を落下する物体がある速度になると、引力と空気抵抗の力がちょうどバランスして、それ以上速度が増大しなくなる。
これを限界速度という。（パラシュートでの落下速度）

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt}$　　$k\frac{dx}{dt}$は空気抵抗
$\frac{dx}{dt}$は速度であり、$\frac{dx}{dt}=$ vとすると
$mv=mg-kv$

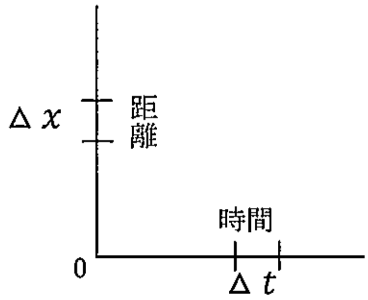
落下速度

経過時間　t

落下距離　x

落下速度　$\frac{dx}{dt}$

落下加速度　$\frac{d^2x}{dt^2}$



$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$

dx — 距離の変化
dt — 時間の変化　……落下速度

経過時間 tで落下速度xを微分すると　$\frac{dx}{dt}$
例えば　$f'x(t) = at^2 + t$　(落下速度)
落下速度xを経過時間 tで更に微分すると　$\frac{d^2x}{dt^2}$
例えば　$f''x(t) = at + 1$　(加速度)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面のほうに向って落下速度を増して行くときの“速度の変化率”つまり、加速度を表わす。

落下速度　$\frac{dx}{dt} = gt(1)$　　gは重力
位置の変化　$x = \frac{1}{2}gt^2(2)$
(2)から$t^2 = \frac{2x}{g}$ → $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$
これを(1)に代入　$gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{dx}{dt} = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$　となる。
すなわち落下速度は　$\sqrt{2gx}$

(空気抵抗がある場合)

m, kは比例定数、$-k\frac{dx}{dt}$ は空気抵抗

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = v$ とすると、

$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ となる。

速度に比例する空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv}$

この両辺をmで割ると、

$\frac{dv}{dt} = \frac{mg-kv}{m}$　$dv = \frac{dt\cdot(mg-kv)}{m}$

$\boxed{\frac{m}{(mg-kv)}dv = dt}$

これは $f(v)dv = g(t)dt$ となる。

左辺はvだけの関数なのでvで積分することができ、右辺はtだけの関数なののでtで積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると、

$\int \frac{m}{mg-kv}dv = \int dt$

$\therefore -\frac{m}{k}log(mg-kv) = t + c$

が得られる。

$\therefore log(mg-kv) = -\frac{k}{m}(t+c)$

$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$

$\therefore v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$　となった。

３． 微分方程式の解き方

（代数方程式）

方程式を解く ― その方程式を満足させる**未知数**を見い出す

（微分方程式）

微分方程式を解く ― その方程式が成立するような**関数の形**を見い出す

時間 t、速度 v、落下距離 x

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv$ ― ①

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv^2$ ― ②

のように、導関数を含んだ方程式を、微分方程式という。

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 階の導関数

$\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}$は、2 階の導関数

………………………………

$\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}$は、n 階の導関数

これに対して、

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 次の導関数

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2$は、2 次の導関数

………………………………

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^n$は、n 次の導関数と呼ぶ

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1 階 1 次の導関数

$\left(\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}\right)^3$は、2 階 3 次の導関数

$\left(\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}\right)^m$は、n 階 m 次の導関数と呼ぶ

４．変数分離形

空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{mg} - \mathrm{kv}$$

この両辺を m で割ると

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{mg - kv}{m} \longrightarrow \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Mg - kv}}$$

さらに変形すると

$$\frac{m}{mg - kv}dv = dt$$

これは$\underline{f(v)}dv = \underline{\mathrm{g}(t)}dt$の形となっている。

左辺は v だけの関数なので v で積分することができ、右辺は t だけの関数なので t で積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{m}{mg - kv}dv = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k}\log(mg - kv) = t + c$$

$$\therefore \log(mg - kv) = -\frac{k}{m}(t + c)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$$

$$\therefore \mathrm{v} = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$$

となり、v を t の関数として表わせる。
これを微分方程式の一般解という。

複利の計算

ある瞬間の現在高に比例して利息が付加されていく場合の総額を$x(t)$で表わし、

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = ax$$

により$x(t)$の変化を明らかにする。

この式は変数分離形の微分方程式で、x の関数と t の関数を

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = adt$と両辺に分離し、

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \int \quad adt$$

$$\therefore \log x = at + c$$

t=0 のとき、x=A として

$$x = Ae^{at}$$

細菌の増殖、細胞の分裂、複利の元利合計など

5．減衰曲線

温度のある物体の温度の下り方

$-\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = kT$、$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = -kT$

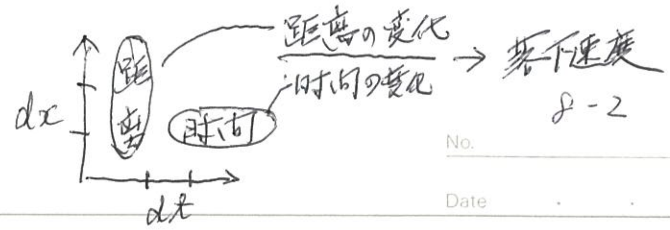
Ｔ：外気との温度差、ｔ：時間

ある瞬間の温度差Ｔに比例して、Ｔが減少するので$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$にマイナスがついている。

水中に射し込む光は、途中でだんだん吸収されてしまう。方程式に書けば

$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dx}} = -kB$

Ｂ：明るさ、ｘ：水深



複利計算

xは時間の経過につれて、どのように増大してゆくか？

ある瞬間にxが増加する割合はそのときのxに比例するので

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax \text{ の関係となる}} \quad ①$$

$\frac{dx}{dt}$ は、元利合計の増加率（単位期間に付加される利息）

aは、利率

xは、そのときの元利合計

xが経過時間tにつれて、どのように変化するかを知るためには、

x(t)の関数形（積分できる式）を探し求めればよい。

式①は、xをtで微分した形なので、xの形を知るには、

この式をtで積分すればよい筈である。ところが

右辺のxはtのどのような関数かわからないので、dxもdtに

小さくても一人前の値として扱うために①式を変形する

$$\boxed{\frac{dx}{x} = a\,dt} \quad ②$$ tとxが微小変化の関係として示される

そして積分する

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt \qquad \int \left(\frac{1}{x}\right) dt = \int (a)\, dt$$

積分を実行すると、

$$\log x + C_1 = at + C_2$$ となる

$$\log x = at + C_3 \quad (C_2 - C_1 = C_3 とする)$$

この式は

$$e^{at + C_3} = x$$

すなわち

$$x = e^{at} \cdot e^{C_3}$$ を表わす。

$t = 0$ のとき $x = A$ とすると $e^{C_3} = A$

$$x = A e^{at}$$ の関係となる

これが、t の関数としての x の形である。

たとえば、1分あたり $1/10$ の割合で増殖している細菌の一群がある。
1時間後には何倍になっているか

$a = 0.1/分$
$t = 60分$

$$A e^{0.1/分 \times 60分} = A e^6 = 403A$$

1時間後に403倍となる。

10日で1割の利息へ
365日でいくらか

$a = 0.1/10日$
$t = 365日$

$$A e^{\cancel{0.1/10日}\,0.01 \times 365} = 38.47A$$

$$1.1^{\frac{365}{10}} = 32.42$$

対数関数の微分（導関数を求める）

$$\boxed{\text{導関数の定義式}\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

より

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h)/x}{h}$$ ← 引き算が割り算に!!

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\boxed{\log_a M^k = k \log_a M}$$

Mのk乗は$\log_a M$のk倍に!!

ここで、$h/x = k$とおく、$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}}$となる。

ここで、kが0に近づくと、$(1+k)^{\frac{1}{k}}$は、ある一定の数 eに近づく。

つまり、$\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$である。$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$

となり、底aをeにすれば、$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$となる。

e の登場

$$\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

kを限りなく0に近づけていくと……

kの値	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$の値
0.1	2.59374246……
0.001	2.7169 23932……
0.00000000 1	2.71828 2052……
↓	
0	$\boxed{e = 2.71818\,1828}$……

対数関数の導関数

（自然対数の場合）

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e$$

$$= \frac{1}{x}$$

真数の逆数がlogの外に

↑

対数は微分すると分数になる

（底がeでない場合）

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

eが真数になる

合成関数

2つの関数 $y=g(u)$、$u=f(x)$ に対して

前者の式に、後者の式を代入してできる関数

$$y=g(f(x))$$

をいう。

合成関数の導関数

$$\{g(f(x))\}' = g'(u)f'(u)$$

である。

つまり、合成関数 $y=g(f(x))$ の導関数は、

$g(u)$ を u で微分し、$f(x)$ を x で微分して

得られる2つの導関数の $g(u)$、$f'(x)$ の積である。

対数微分法

$y = x^p$ の微分　　対数で表す

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

（左辺）

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

（xの変化を考えずに
yの変化する関数と
考える
→ yの関数である）

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数

↓ yで微分　　↓ xで微分

$(\log y)' = \dfrac{1}{y}$　　y'

↓ かけ算

$$\boxed{(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}}$$

（右辺）

$p \log x$

↓ xで微分

$$\boxed{(p \log x)' = p \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{x}}$$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{p}{x}$ より　$y' = \dfrac{p}{x} \cdot y = \dfrac{p}{x} \cdot x^p = px^{p-1}$

$y = x^p$

$$y' = px^{p-1}$$

指数関数の微分（導関数）

指数関数 $y=a^x$ の微分

↓ 両辺を対数で表す（対数微分法）

$$\log y = \log a^x = x\log a$$

①左辺

$\log y$ と $y=a^x$ の合成関数

↓ yで微分　↓ xで微分

$$(\log y)'\cdot y' = \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{y'}{y}$$

②右辺

xで微分すると

$$(x\log a)' = (x)'\cdot\log a$$

$$= 1\cdot\log a = \log a$$

$y=x$ なる $y'=(x)'=1$ の公式

↓

$\frac{y'}{y} = \log a$ より $y' = y\log a$

$= \underline{a^x}\log a \longrightarrow y' = a^x\log a$

上記の $y=a^x$

指数関数の微分

指数関数 $y=e^x$ は微分しても変わらない

底が e の場合

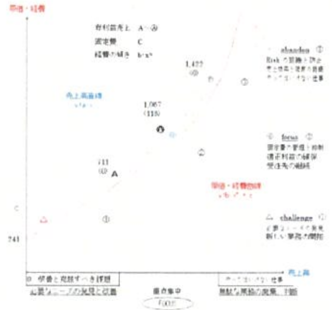
$$(e^x)' = e^x$$

微分しても変わらない

底が e でない場合

$$(a^x)' = a^x\log a$$

2019.01.21
2018.10.15
2018.08.13
2018.06.10
2018.04.16
2018.01.07
2017.10.10
2017.07.10
2017.04.23



指数・対数

会計と経営のブラッシュアップ

2019.07.28

山内公認会計士事務所

2019.09.17
2019.09.24

次の図書を参考にさせていただきました。
（ゼロからわかる指数・対数　2007.12 深川和久著　ベレ出版刊）（関数のはなし上、下
（図解雑学指数・対数　2013.5 佐藤敏明著　ナツメ社刊）　2012.5 大村平著 日科技連刊）

I. 指　数

1. 指数とは、いくつかけ算されているかということ

つまり、大きな数、$2\times2\times2\times2\times2$ を 2^5 と書き、2 の 5 乗という累乗のこと。
大きな数を表すことに適している。

(1) 世の中は、**かけ算的（指数的、曲線、複利）**に従う傾向にあり、人はそれを**足し算的**（直線）に理解しようとする傾向がある。

現象は複雑であっても大づかみに理解したい

（例）かけ算、指数

国や経済の伸び　—　対前年比○％　----何倍くらいか-
預金やローンの利息　—　金利の計算
指数とは　—　かけ算のくり返し

AI、デジタル、将来

従って世の中は指数的に変化する傾向にある**（激しい変化の世界）**
しかし、人は足し算的にものを見ようとする**（静かな変化の世界）**

歴史、対数

世の中はかけ算的・指数的（変化・変動）であるのに、人は足し算的（静止的固定的）に勘違いしている。この面において世の中は複雑である。

（大量）

そして、この**指数の逆が対数（単純化）**である。
対数　　　　は複雑なものを単純にしようとする。
そして人の五感はことごとく対数的である。しかし、現実は指数的である。
人の記憶や歴史も対数と深く関係している。だから、過去は対数的
歴史上の出来事は、1 年を 1 とすると、10 年は 2、100 年は 3、1000 年は 4・・・という並び方になるかもしれない。（記憶の量）

過去は会計のようにコンパクトな報告が優れている。　過去は大づかみになる。
（内容も、意味も）

過去は大つかみになる

戦後の歴史

過去は〜〜

振り返ると対数的になる　その当時 (~~現在~~は指数的にあるとしても)

S20	S25	S30	S35	S40	S47
(1945)	(1950)	(1955)	(1960)	(1965)	(1972)
終戦 財閥解体	朝鮮特需 第1回ブーム	TV もはや戦後ではない	所得倍増計画 東京タワー	東京オリンピック 東京-名古屋高速	本土復帰 沖縄に
(4. 疎開)	(9. 小学)	(13. 中学)	(18. 高卒)	(23. 社会)	(30. 会計士)

2. 指数の法則

過去	現在	未来
対数	指数	超指数
(たし算)	(かけ算)	(指数のべき算)

現在に立って過去を見ると

〜と感じるかも

知れない

(1) かけ算がたし算に変わる

$10^2 \times 10^3 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{2+3} = 10^5$

$10^8 \times 10^4 =$ 1億×1万＝1兆

$= 10^{8+4} = 10^{12}$

指数のかけ算は、底が同じならば指数のたし算となる。

(2) 累乗はかけ算に変わる

$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3}$

$= 2^{3\times4}$

2の3乗の4乗は、2の3×4乗となる。

つまり、指数の指数は、指数のかけ算になる。

指数関数的な変化

(3

指数法則

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{nm}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^0 = 1$$

ただし　$a, m, n > 0$

対数は感覚の数学

$2^{\boxed{n}} = 8$

$\log_2 8 = \boxed{}$

2を何乗回すると8になる
2をベースとした8の対数は回

$\log_2 8 = 3$

底 ベース　　対数

2をベースとした8の対数は$\boxed{3}$になる

2倍になると1増える

$\log_2 16 = 4$

10がベースの対数

$\log_{10} 10 = 1$

$\log_{10} 100 = 2$

……10億だってたったの9

$\log_{10} 10億 = 9$

対数は大きな数を表わすのにすごーく便利なもの

対数は人間の感覚に合っている

マグニチュードは地震のゆれが10倍になると1増える

マグニチュード4と7では1,000倍の違いという感じ

PROGRAM MANUAL

PROGRAM NAME	PROGRAM NO.	PROGRAMMER
連続複利に使われる定数 e	= 2.718……	

処理図

1万円を年利100%の複利で貯金する

半年毎に1回利息を元金に組入れるとすると、

半年毎の金利は $\frac{1}{2}$ (50%) となり、

毎月だと、

毎日だと、

1年に1,000回利息を元金に入れると、

結局、回数を無限に増やして

処理手順

$1 \times (1+1)^1 = 2.00$

$1 \times \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613……$

$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714……$

$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.718……$

$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2.71828……$

処理条件

1万円を、年利率 0.05 で貯金し、n回の複利で、元利合計を計算すると

$$1 \times \left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{0.05}}\right)^{\frac{n}{0.05} \times 0.05}$$

元利合計 $= 1 \times \left(1+\frac{0.05}{n}\right)^{n \times 2} \longrightarrow e^{0.05 \times 2}$

連続的な複利計算

	365回複利	1年
1年後	1.051267	1.051271
	1.1025	1.1052

1年후

$\left(1+0.05\right)^{n \times t} \longrightarrow e^{0.05t}$

$A \cdot (1+0.05)^{n \times t}$ $A \cdot e^{0.05t}$

DATE

元利合計の計算

段階状の元利合計

「ある期間」後に α の利息がつく $\quad 1+\alpha$

連続状の元利合計

$$\left(1+\frac{\beta}{k}\right)^k$$

「ある期間」をk等分し、それぞれに
β/k の利率で利息をつけながら複利計算
をしてゆくと考えると、「ある期間」後の元利合計は、↗

α と β の関係は
となる

$$1+\alpha=\left(1+\frac{\beta}{k}\right)^k$$

そして、kをどこまでも大きくした極限は、

$$\lim\left(1+\frac{\beta}{k}\right)^k=e^{\beta}$$

従って、α と β の関係は、

$$1+\alpha=e^{\beta}$$
$$\therefore\ \alpha=e^{\beta}-1$$

この関係を x期間後の元利合計である式、$y=A(1+\alpha)^x$
に代入すると

細菌のように連続的に増殖する場合の式は、

$$y=A(1+e^{\beta}-1)^x$$
$$=A(e^{\beta})^x$$
$$=Ae^{\beta x}$$

これが、連続的に増殖していく現象について、
x期間後の量を表わす関数の形となる。

y ＝ x期間後の元利合計、個数
A ＝ 元金、最初の個数、スタート時の量
x ＝ 指数関数
β ＝ 利率、増加率 $\qquad =Ae^{\beta t}$
x ＝ 期間 $\qquad$ tとすると

ここで，減衰する場合の式(14.5)を，増殖の式

$$\boxed{y = Ae^{at}} \qquad (13.11)\text{と同じ}$$

と較べてみてください．e の肩の at にマイナスの符号がついただけです．この符号は，ここまでのいきさつによれば a についたものですが，しかし，a にではなく t についたものと考えても数学的には同じことです．したがって，減衰関数の式(14.5)は，増殖関数において t がマイナスの方向へ進行した場合に相当します．ただ，一般的な自然現象や社会現象を表わすときには，時間 t がマイナスのほうへ進行するのは不自然で，めったにないことですから，減衰を表わす関数

$$\boxed{y = Ae^{-at}} \qquad (14.5)\text{と同じ}$$

では，t がプラスの値として使用されることがほとんどです．こういういきさつですから，式(13.11)や式(14.5)では，a はとくに断らなくても正の値であり，マイナスの符号に重要な意味があると考えるのがふつうです．

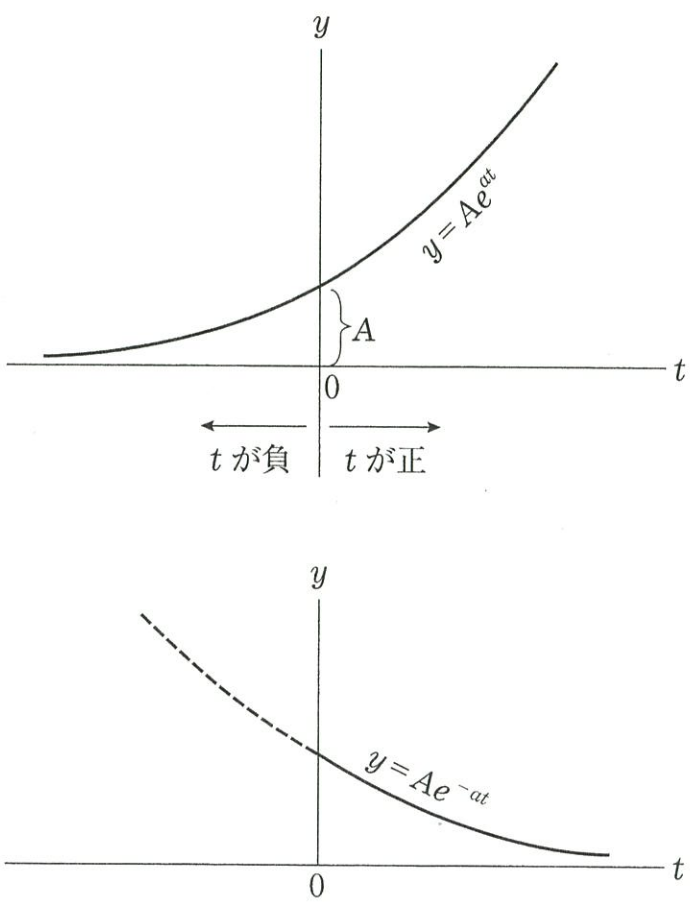


図 14.1

減衰量の計算

段階状の減衰量 $1-\alpha$

「ある期間」後に α の減衰が生じる

連続状の減衰量

「ある期間」を k 等分し、それぞれに

a/k の率で 減衰してゆくと考えると

ある期間後の残量は、 $\left(1-\frac{a}{k}\right)^k$

α と a の関係は、 $1-\alpha=\left(1-\frac{a}{k}\right)^k$

そして、k をどんどん大きくした極限は、 $\lim\left(1-\frac{a}{k}\right)^k=e^{-a}$

従って、α と a の関係は、 $1-\alpha=e^{-a}$

この関係を、x 期間後の減衰量の式、

に代入すると、 $y=A\left(e^{-a}\right)^x$

放射線物質、水温のように連続的に減衰する場合の式は、 $=Ae^{-ax}$

x 期間後の量を表わす関数の形となる。

y：x 期間後の状態

A：スタート時の量

e：指数関数 the exponential function

a：減衰率

x：期間　　t と $\frac{}{}$ すると $=Ae^{-at}$

放射性物質の崩壊

連続的に複利で減衰してゆく場合の指数関数

$$y = Ae^{-at}$$ (14.5)と同じ

を現実の問題に応用してみようと思います．ラジウムはもっともよく知られた放射性物質のひとつです．ラジウム226は現在量に正比例した速度で崩壊を続けるのですが，その結果，1,600年経つと元の半分の量に減ってしまうことがわかっています．いま1gのラジウム226があるとして，100年後には何グラムのラジウム226が残っているでしょうか．また，1,000年後にはどうでしょうか．さらに，10,000年後には……？

式(14.5)で，tがゼロのときyが1gですから，Aは1gのはずです．したがって，この問題は

$$y = e^{-at} \qquad (14.6)$$

ただし，yの単位はg

tの単位は年

を使って解くことになります．ラジウム226の性質として，1,600年たつとyは1gの半分になるのですから

$$0.5 = e^{-1600a}$$

$\rightarrow \log_e 0.5 = -1600a$

e^{-x}が約0.5になるようなxは付録の表によって0.69ですから

$\frac{-0.69314}{1,600} = -a$

$$1600a = 0.69$$

$$\therefore \quad a \fallingdotseq 0.00043$$

$a = 0.00043$

であることがわかります．そうすると

〔100年後には〕

$$y = e^{-0.00043 \times 100} = e^{-0.043} \fallingdotseq 0.96\text{g}$$

性物質の寿命はいくらか，と尋ねられたら，どう答えたらよいでしょうか．全滅する瞬間をもって寿命が尽きたと判定するならば，放射性物質の寿命は無限と言わざるを得ません．なにしろ，永久に全滅することはないのですから……．けれども，放射性物質は明らかに崩壊して減少をつづけるのですから，寿命が無限というのは適当ではありません．とすれば，たとえば「半分にちびるまでの期間」くらいを放射性物質の寿命の長さを表わす指標とでもしなければ，しかたがないのです．で，放射性物質の場合，「半分にちびるまでの期間」を半減期と名付けて，これで放射性物質のしぶとさ加減を表わすのがふつうです．

水の抵抗でだんだんと速度が落ちてゆくボートの場合も，いつ止まるのかと質問されたら答えに窮します．いつまでも止まらないというのが正確な答えなのですが，しかし，何十分か経過した後には見てもわからない程度にしか動いていないのですから，いつまでも止まらないという答えは実用的ではありません．そこで，速度が半分になるのに何分かかるか，という観点から質問し，それに答えるのが分別のある対応というものでしょう．

水中に射し込む光の場合もそうです．光はどこまで届くのかと聞かれて，無限の深さまでと答えたのでは，数学的にはともかく，実用上役に立つ答えとは思われません．やはり，光が半分だけ吸収されてしまう深さ

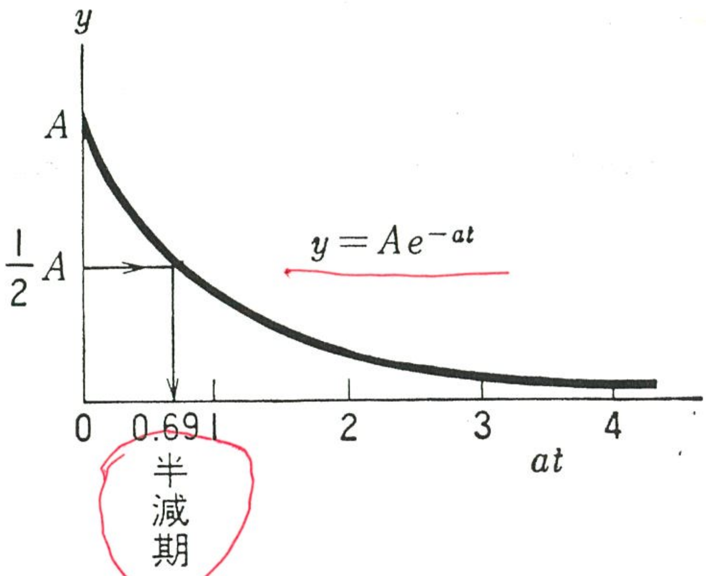


図 14.2

対数関数、指数関数の微分

DATE ~~2017.07.18~~ 2017.10.17

参考（Excelで学ぶ微分積分 山本将史著 H24.8 オーム社）

1. 対数関数の微分

(1) $x = a^y \longleftrightarrow y = \log_a x$

$8 = 2^3 \qquad 3 = \log_2 8$

(2) 底がaの場合 ($y = \log_a x$)

$y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \log_e a}$ $(a>0,\ a \neq 1)$

$a^y = x$

(3) 底が自然対数の底 e の場合 ($y = \log_e x = \ln x$)

$y = \log_e x = \ln x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$y' = \dfrac{1}{x \log_e e} = \dfrac{1}{x}$

(4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

NO.

DATE

2、指数関数の微分

$\boxed{(1)\ y = a^x}$ ①　$\longleftrightarrow$　$x = \log_a y$

底が a の場合　$y = a^x \rightarrow y' = a^x \log_e a = a^x \ln a$　①′

底が e の場合　$y = e^x \rightarrow y' = e^x$　①″

(1) 両辺の自然対数をとると

$$\underline{\log_e y} = \underline{x \log_e a}$$

x が 1 になる

(2) 両辺を別々に、x について微分する

左辺は、

$\log_e y = u$ とおき、

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$= \frac{y'}{y}$$

(3) 右辺は、$(x \log_e a)' = \log_e a$

となることから

① の微分は、$\frac{y'}{y} = \log_e a$

左辺の $\frac{y'}{y}$ から

$\frac{y'}{y} = \log_e a$ から

$y' = y \log_e a$ ②

↓

① が $y = a^x$ なので

$y' = a^x \log_e a$ ①′

又は $(a^x)' = a^x \log_e a$

指数関数の底を e を用いると

$y = e^x$ から、$y' = y \log_e e = e^x \log_e e = e^x \times 1 = e^x$

$y' = e^x$ となる ①″