計画シミュレーション（第8回）

2019.08.1

1、パラメータの設定

(1) 変動費率の決定

(2) 固定費の決定

(3) 損益分岐点 $= \frac{\text{固定費}}{(1-\text{変動費率})} = \frac{\text{固定費}}{\text{粗利益率}}$

(4) 目標売上高 $= \frac{(\text{目標利益})+\text{固定費}}{\text{粗利益率}}$

(5) 目標利益 …… 成長目標、
借入返済額
設備投資額

2. BSの構成要素

(1) 運転資金　売上債権＋棚卸資産－仕入債務

(2) 設備投資

(3) 借入金

3. 運転資金回転日数

＝売上高の何日分か

運転資金は、売上の何日分か

＝運転資金

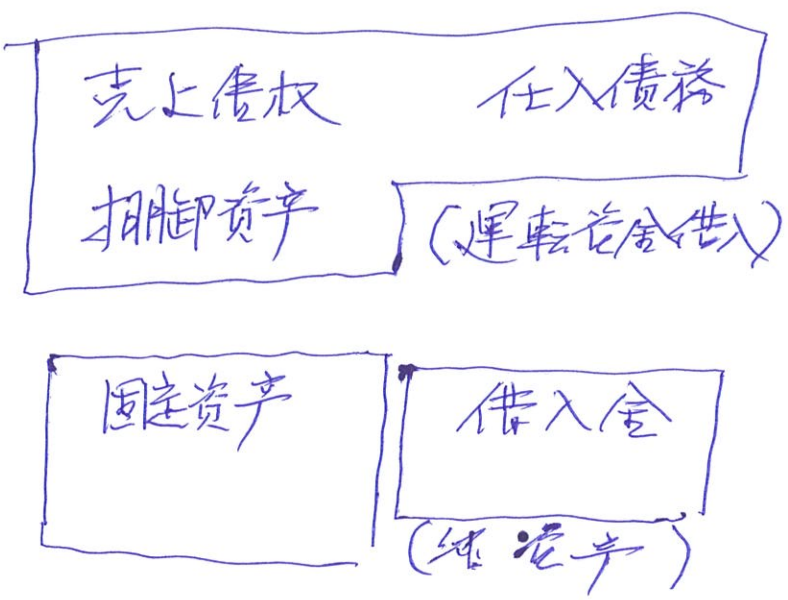
＝売上債権＋棚卸資産－仕入債務

4. BS計画値

(1) 運転資金（回転日数）

(2) 固定資産

(3) 借入金



5. C/F は P/L のズレ

(1) 営業C/F	利益 ＋ 償却費 ＋ 運転資金
(2) 投資C/F	設備投資
(3) 財務C/F	借入増減

6. 運転資金借入
設備 〃

(1) 運転資金	売上債権	×××
	棚卸資産	×××
	仕入債務	(−)×××
	諸経費 (赤字分)	×××

(2) 設備資金

7、計画（シミュレーション）概要

(1) 設備投資・長期借入

	1	2	3	4	5
設備投資					
減価償却費					
長期借入					
〃 返済					

(2) P/L計画

法人税率
粗利益率
人件費増加率
経費増加率
平均金利率

(3) 投資計算書

(4) 運転資金計算書

(5) 貸借対照表

(6) キャッシュフロー計算書

2019.01.07
2018.12.24
2019.01.28

No.

DATE . . 1

CAPM理論（第5回）

参考図書

H12.3 清文社
非公開株式の鑑定評価の実務 高橋義雄著
資本コストの実務 津森信也著 2008.2 中央経済社
非上場会社の企業価値評価の実務 タクトコンサルティング著 H18.4 大蔵財務協会
企業評価ガイドライン 日本公認会計士協会 出版局 H2
株式鑑定評価マニュアルQ&A 〃 H7.9 商事法務

1、擬制資本

株式評価額は、擬制資本の一形態であり、定期的な不労所得を生み出す資本を想定（擬制）し、逆算のプロセスにより、資本還元することである。

$$\boxed{C：擬制資本 \quad A：果実_{100} \quad r：利子率_{0.05}}$$

1年後の果実 A、$\frac{A}{(1+r)}$ 2年後 $\frac{A}{(1+r)^2}$ n年後 $\frac{A}{(1+r)^n}$

$$\overset{95}{} \quad + \quad \overset{91}{} \cdots\cdots \overset{86}{} \cdots\cdots + \quad \overset{0}{}$$

$$C = \frac{A^{100}}{\underset{1.05}{(1+r)}} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots\cdots + \frac{A}{(1+r)^n} \qquad (3-1式)$$

（3−1式）の両辺に $\frac{1}{(1+r)}$ を乗ずると

$$C \times \frac{1}{(1+r)} = \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^{n+1}} \qquad (3-2式)$$

$$\boxed{(3-1式) - (3-2)式は、}$$

左辺は $C - C\frac{1}{(1+r)} \longrightarrow C\left(1 - \frac{1}{(1+r)}\right) = \frac{C(1+r)}{(1+r)} - \frac{C}{(1+r)}$

$$= \frac{C + Cr - C}{(1+r)} = \frac{Cr}{(1+r)}$$

↓

（左辺） （右辺）

$$\frac{C}{(1+r)} = \frac{A}{(1+r)} - \frac{A}{(1+r)^{n+1}} \quad \cdots\cdots n \to \infty で \quad \frac{A}{(1+r)^{n+1}} は ゼロ になり、$$

$$C = \frac{A\cancel{(1+r)}}{r\cancel{(1+r)}} - \frac{A\cancel{(1+r)}}{r\cancel{(1+r)}^{n+1}} = \frac{A}{r} - \frac{A}{(1+r)^{n+1}} = \frac{A}{r}$$

$$C = \frac{A}{r} \qquad \frac{100}{0.05} = 2{,}000$$

$$\boxed{擬制資本C = \frac{果実A}{利子率r}}$$

又は 永続価値

予想最終期のフリーキャッシュフロー ÷ (r−g)
（gは永続的成長率を仮定する場合）

2 CAPM 理論

(1) リスクとリターンの関係の明確化

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \{E(r_m) - r_f\}$$

r_f : リスクフリーレート (国債の金利等)

β_i : ユニークリスク
任意の株式の市場全体に対する相対的変化率

$E(r_m) - r_f$: マーケットリスク

株式のリスク (リターン) は、
不確実性、
標準偏差

(イ) リスクフリーレート
(ロ) その株式のユニークリスク (投資株式の個別リスク)
(ハ) マーケットリスク　見積りが難しい

マーケットリスクは、$E(r_m) - r_f$ に対応しており、
ユニークリスクは、β_i に対応する

(2) CAPM と株主資本リスク

① 債権者の要求するリターン (コスト)
受取利息 + リスク (回収不能リスク)

② 株主が要求するリターン (コスト) ---- 株主資本リスク
= 株主資本コスト
配当金 + 値上り益 (値下りリスク)

(4) 具体例 東芝機械（東証一部）

① 東芝機械の 株主資本コスト $E(r_i)$ 9.66 %

② 〃 ベータ値 Topixデータ集 1.38

③ 〃 マーケットリスク $E(r_m) - 1.66 = 5.8$ $E(r_m) = 5.8 + 1.66 = 7.46$

$$E(r_i) = r_f + \beta\{E(r_m) - r_f\}$$

$$= 1.66\% + 1.38 \times 5.8\% = 9.66\%$$

(4)-2 具体例 平均的な機械製造業（上場）

① 株主資本コスト $E(r_E)$

$$r_f + \beta\{E(r_m) - r_f\}$$

$$= 1.66\% + \underline{1.15} \times 5.8\% = 8.3\%$$

東芝機械のベータ値は 1.38

(5) 資本コスト

WACC Weighted Averag Cost of Capital

$$\text{資本コスト (WACC)} = \frac{D}{D+E}(1-T) \times r_D + \frac{E}{D+E} \times r_E$$

D：~~長期~~負債の時価 （簿価と一致する場合も多い）

E：株主資本の時価 （株価×発行済株式数）

T：実効税率

r_D：負債のコスト （利子率）

r_E：株主資本コスト （$r_f + \beta\{E(r_m) + r_f\}$

(3) 具体的計算　ベンチャーZ社

① Z社の株主資本コストは、　$E(r_Z)$

② 〃　ベータ値　は、　β_Z

景気	確率	Z社利回り	市場利回り	リスクフリー利率
好況	0.3	60%	30%	
並	0.4	30	10%	
不況	0.3	0	5%	

$E(r_Z)$ Z社利回り期待値　$0.3\times60\%+0.4\times30\%+0.3\times0\% = \underline{30\%}$

$E(r_m)$ 市場利回り期待値　$0.3\times30\%+0.4\times10\%+0.3\times5\% = \underline{14.5\%}$

$Var(r_m)$ 市場の分散 σ^2　$0.3\times(30\%-14.5)^2+0.4(10\%-14.5)^2+0.3(5-14.5)^2 = \underline{107.25}$

$Cov(r_Z, r_m)$ Z社と市場の共分散

$$0.3\times(60-30)\times(30-14.5)+0.4\times(30-30)\times(10-14.5)+0.3\times(0-30)\times(5-14.5) = \underline{225}$$

$$\begin{aligned} E(r_Z) &= r_f+\beta_Z\{E(r_m)-r_f\} \\ &= r_f+\frac{Cov(r_m, r_Z)}{Var(r_m)}\{E(r_m)-r_f\} \\ &= 10\% + \frac{225}{107.25}\times\{14.5\%-10\%\} \\ &= \underline{19.4\% \longrightarrow 約20\%} \end{aligned}$$

$$\beta_Z = \frac{225}{107.25} = \underline{2.10}$$

19.4%+10% ではないか.

Z社の株価は、値動きが激しく、リスクも大きいため、

株主資本リスクは <u>19.4% と高く</u>

当然ながらベータ値も <u>2.10 と高く</u>なっている。

3. CAPMの算定　株主資本コスト率

$Re = Rf + \beta(Rm - Rf)$ ＋個別リスクプレミアム

Rf : デフォルトリスクのない投資対象に期待する利回り（国債の利回り等）

Rm : 株式市場の期待収益率

$Rm - Rf$: 市場のリスクプレミアム

株式市場に期待される平均的な利回り
（直近期より、長期間の平均とすべきとの考え方が多い）

β : ベータ値　会社の株価と市場全体の株価の動きとの相関関係
（株式市場に対する株価の変動を示す係数）

市場全体と同じ動きをする会社	$\beta = 1$
業績の変動が激しい会社	$\beta > 1$
安定業種	$\beta < 1$

	入手できる機関
ベータ値	Bloomberg, 東京証券取引所 Ibboston Associates Japan, Inc.
ベータ値の修正	EDINET
マーケットリスクプレミアム	Ibboston Associates Japan, Inc. Bloomberg
リスクフリーレート	Bloomberg など

株主資本リスクは、その対象会社に対して、どのくらいのリスク・リターンを求めるかという割合である。日本市場における株式リスクプレミアム(Rf)に、評価会社のボラティリティであるベータ値を乗ずることによって個別のリスクプレミアムを算定する。
（ブレ）　(β)　$\beta(Rm-Rf)$

金融政策
2019.07.22
2019.08.19

非伝統的金融政策の経済分析

竹田陽介 矢嶋康次 著 2013.11 日本経済新聞

1. 全般

(1) 1999年2月の日銀によるゼロ金利政策の導入に始まり
（現実的な、実用的な）
世界はプラグマティックな対応、非伝統的な金融政策の発動を余儀なくされてきた

(2) 非伝統的な手法が採用されて10年以上経過（1999-2012）したが、金融政策上の効果はどれほどあったかの実証分析の必要性
（資産価格の上昇に効果は見られない）

(3) 2012年の政権交代へ

(4) 日本はじめ欧米諸国で実施されてきた非伝統的金融政策を見ると、貨幣という象徴的道具の適切な供給の中で、中央銀行という専門家集団による知性の結晶が、個人の信頼の下で実行に移されてきたように映る。（しかし、日本のデフレ解消には失敗ではないか？）

(5) それはあたかも、重病患者の治療に当たる医師が、治療薬の投与の効果の検証をもとにして、治療方針を漸次変えていくように、定型に頼らず、プラグマティックな政策判断に従って、漸進的に履行されてきた。（この政策の変更が抜本的でない？）

(6) 非伝統的金融政策は、リスク社会における壮大な社会実験ともいえる

(7) デフレの真因は、将来の不安が増し、（高齢化や経済の谷……）貯蓄を増加させ、消費や設備投資に消極的になる負の循環ループに真因がある
これは、沖縄経済における生産性（アウトプットを資源とインプットの）非効率性さにも似ている感じがする。

2、日破れし中銀あり方、

(1) 中央銀行の近未来像について、経済学から俯瞰する

(2) 本書のコンセプト「金融深化」Financial deepening
をキー・コンセプトとする

(3) 中央銀行は、「最後の買い手」として
リスク資産市場を積極的に育成する必要がある。

(4) 金融政策と資産価格形成の問題

(5) 金融政策の伝統とは、何を意味するのか—
“資産価格にもたらす短期的な効果ではないか”？

(6) 短期的な視点
非伝統的金融政策の類型とその効果

(7) 長期的な視点と中央銀行の近未来像
長期的な問題、マクロショック
少子高齢化
地震などの自然災害

デフレーション

1990年代後半以降、日本において顕在化したデフレーションについて考える際、
1930年代の大恐慌の教訓が想起される。

日本経済が1990年代後半以降、陥ってきた「流動性の罠」とは、利子率が下限に
あることを誰もが知っており……
この下においては、金融政策の効果は発揮されない

3、金融市場との対話、リアルタイムの政策評価

(1) 日銀 展望レポート等 1998年～ による経済見通し、

(2) サブプライムローン、リーマンショック時の
ジョン・テイラー スタンフォード大教授による「ブラック・スワン」

サブプライムローン危機が表面化した 2007.8 時点において、
いくつかの利子率スプレッドが高騰した
次頁図表参照

(3) 日銀の 1900年代の金融政策の変遷
図表参照

1995年7月からは、公定歩合から無担保コールレートに
操作目標として役割がうつった。
金利による従来の金融政策が限界に差しかかる中、日本銀行は
非伝統的な領域に突入して行く

(4) 速水総裁時代：ゼロ金利政策から量的緩和へ (98/3－03/3)
新日銀法が1998年スタート。98年9月には無担保コールレートを
0.25%に引下げ、99年2月には「ゼロ金利政策」を導入した。
政策目標は、金利から量に変更された。

(5) 福井総裁時代：量的金融緩和の強化 (03/3－08/3)
日銀当座預金の拡大 5兆円 → 35兆円

(6) 白川総裁時代：包括的金融緩和 (08/3－13/3)
2008.9 リーマンショック 2011.3 東日本大震災

(7) 黒田総裁時代：量的・質的金融緩和政策 (13/3 ―)
2%の物価上昇目標を 2年程度で達成する

過去の経験や統計では予測できない現象のこと
このことで、世の中が一変するような現象

図 J-1　「ブラック・スワン」のカウンターパーティ・リスクに与えた影響

前掲書から
コピー

2008.9
リーマンショック

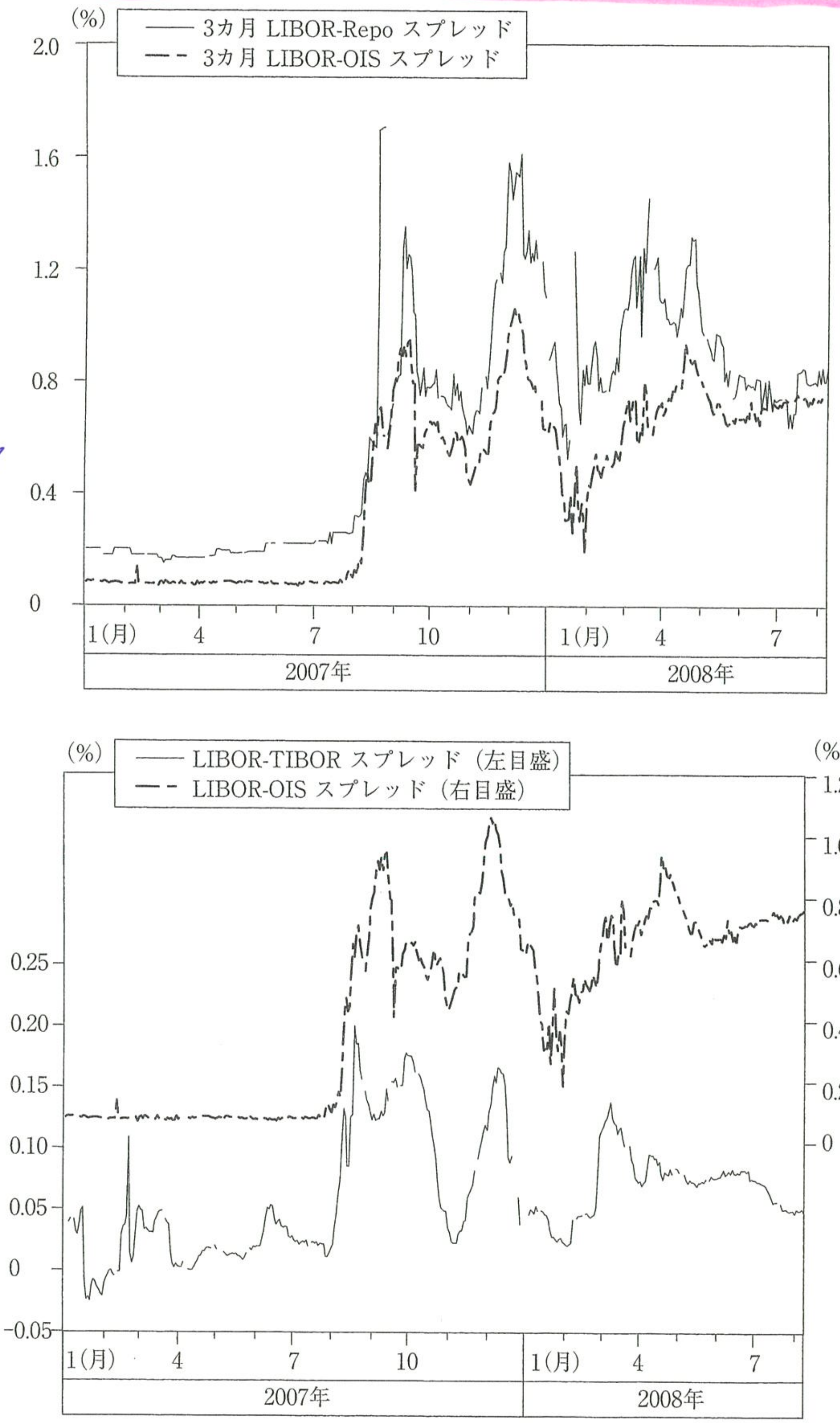
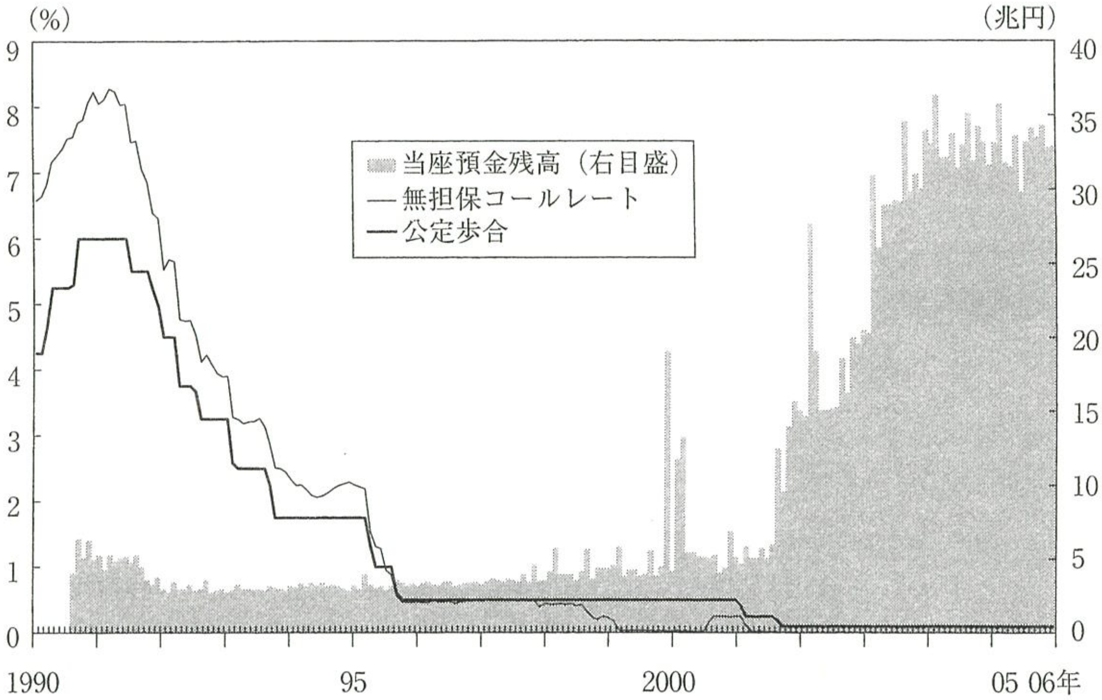


図 J-2　1990 年代の金融政策の変遷



注）2004 年 3 月以前の当座預金残高は、準備預金残高の数値となっている。
出所）日本銀行。

き下げが実施され、2001 年 9 月以降 0.1%となっている。

1995 年 7 月からは公定歩合を下回る水準に無担保コールレートの誘導目標が設定され、公定歩合から無担保コールレートに操作目標としての役割がシフトした。金利による従来の金融政策が限界にさしかかる中、日本銀行は非伝統的な領域に突入していく（図 J-2 および表 J-1）。

期待形成の指標

(1) オーバイ・インタ
(2) 金融資産価格
(3) 予測市場

4 日本銀行の金融政策の質的な転換

(1) 90年代以降の日銀の金融政策は、
ゼロ金利政策、時間軸効果、量的緩和政策の導入、
包括的金融緩和 — という歴史上稀に見る変化であった。

その過程にあって、日銀は政策のコミットメントの強化を意図してきた。
このことは、金融政策が金融市場に対して働きかける
メカニズムの質的な転換を意味する

Fed View

バブル識別の困難性、後始末の効率性を内容とする
グリーンスパン主義

BIS View (aggressive bubble poping)

中央銀行として掲げる雇用と物価という二つのマクロ経済の目標に対し
資産価格の変動が及ぼす影響を注視すべきだとする

「最後の買い手」でもある中央銀行が、金融資産の市場流動性を高め、
投資家のリスク許容度を下げ、流動性プレミアムのみならず、信用スプレッドを
引下げることを金融政策に期待する

7

前掲書から

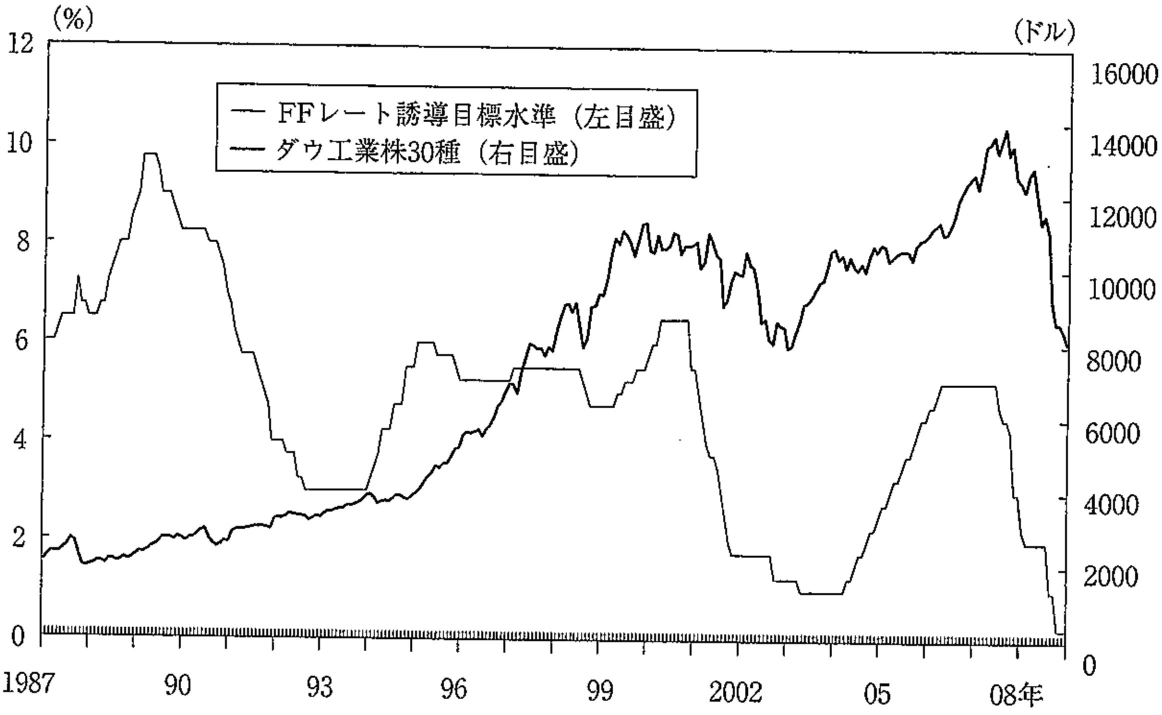
表 J-4　グリーンスパン FRB 議長の時代

時期	金融政策	株価	住宅価格
1984 年 9 月 20 日 ～87 年 4 月 29 日	金融緩和 （11%⇒6.25%）		
87 年 8 月 11 日	グリーンスパン議長就任		
87 年 10 月 19 日		「ブラックマンデー」	
87 年 10 月	金融緩和 （7.25%⇒6.5%）		
88 年 3 月	金融引き締めへの転換 （6.5%⇒9.75%）		
89 年 6 月	金融緩和 （9.75%⇒3%）		
94 年 2 月	金融引き締めへの転換 （3%⇒6%）		
96 年 12 月 5 日		「根拠なき熱狂」発言	
99 年 6 月	金融引き締めへの転換 （5%⇒6.5%）		
2000 年 8 月		期中最高値	
2001 年 1 月 3 日 ～04 年 6 月 29 日	金融緩和（6.5%⇒1%）		
01 年 12 月 11 日	FF レート＝1.75%	テロ（2001.9）勃発により株価底割れの危機を迎える	
02 年 11 月 6 日	FF レート＝1.25%		
03 年 6 月 25 日	FF レート＝1%		
04 年 6 月～ 06 年 6 月	金融引き締めへの転換 （1%⇒5.25%）		
05 年 5 月 20 日			グリーンスパンが一部地域における「フロス」（泡）の存在を指摘
06 年 2 月	バーナンキ議長就任		
06 年 6 月	FF レートの据え置き		Case=Shiller 指数（10 都市）が最高値
07 年 7 月		史上最高値を更新	
07 年 9 月	金融緩和		

8

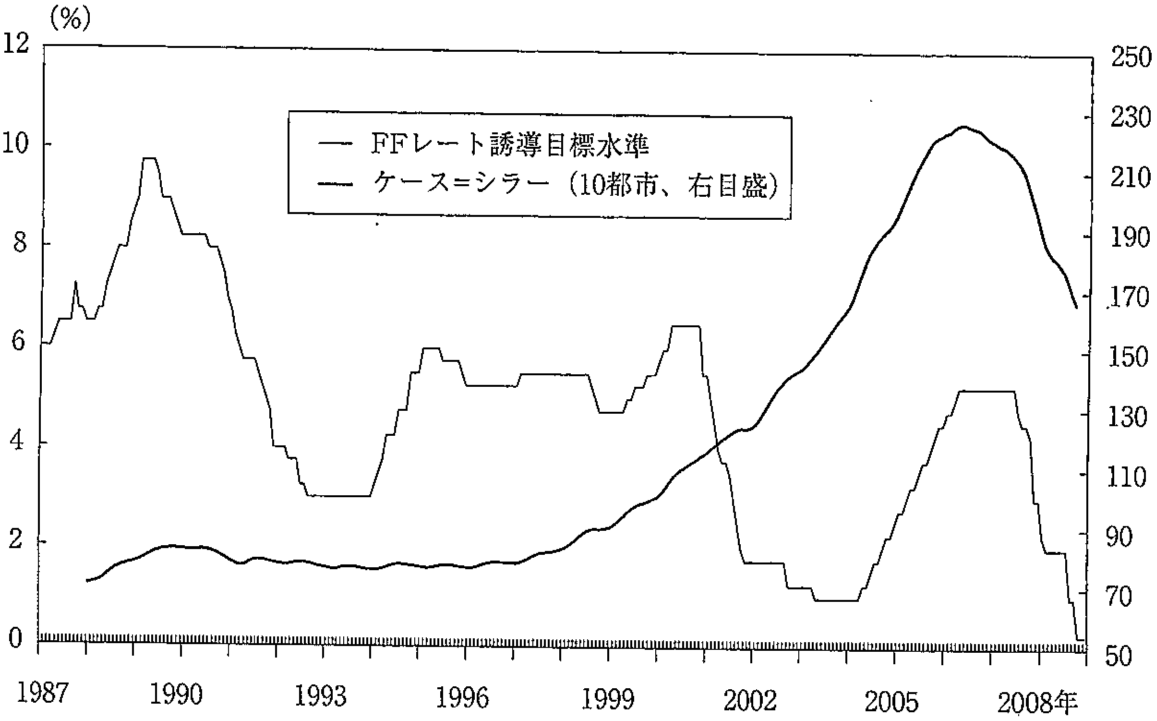
前掲書
から

図 J-3　株価と金融政策



資料）FRB。

図 J-4　住宅価格と金融政策



資料）FRB、SP。

5、グリーンスパン議長の下でのFRB

(1) グリーンスパンは、1987.8〜2006.1まで　18年半
FRB議長を務めた
この間は米国のGreat Moderation（大いなる安定）と呼ばれる
低インフレ、安定成長の時期であった。

(2) 87.10のブラックマンデー、　94末のメキシコの金融危機
97のアジア通貨危機などの次々に乗り切った。
その手腕はmaestra（名指揮者）と称された。

(3) 2006.6に0.25%の利上げが有り、（連続17回の利上げ）
5.25%となり、その後2007.8まで続いた。

(4) この利上げにより、懸念されてきた「住宅バブル」が
いよいよはじけることとなった。
全米の住宅価格は2006までの10年間で約2倍程度
大都市では、3倍にと上昇した。
07はじめからから下落が始まった

(5) 資産バブルに対するグリーンスパン主義は、
① バブルの気配があるとしても、それを技術革新による
技術ショックとの識別は困難である
② 例え識別できたとしても、バブル潰しに大した効果は期待できない
③ もし引締を行うなら、景気安定化を損なうほどの引締めが必要である
④ 崩壊に伴う事後的措置のコストの方が低い

6、資産バブルに対する考え方　バーナンキ議長 2002年

(1) FRBの資産バブルに対する考え方には二つある

(2) 第一は "lean-against-the-bubble strategy"

(後始末戦略　バブルは崩壊するまで放っておく戦略)

(3) 第二の考え方は、"aggressive bubble popping"

(バブルに逆らう戦略)

後始末戦略は危険である

(4) サブプライムローン危機後の批判

ムッサ議　バブル破裂による「負債デフレ」の状況を

生み出す危険性もある。

(5) グリーンスパンは、

タイミングよくバブル退治ができるという主張は、FRBに

対する幻想である。

バブルがはじける前に、金利を上げて、投資の過熱を防げばよい、

というけれど、それが出来れば易しいこと・・・・

しかし、バブルははじけてからこそバブル・・・・・

それが出来た例は・・・・

"タイミングよくバブル退治ができる"という主張は、中央銀行に対する

"幻想"である。

7、非伝統的金融政策の類型

(1) 非伝統的金融政策は、伝統的な政策手段であった超短期の銀行間貸借市場における金利がゼロの下限制約に直面した下での金融政策である。

(2) 第一は、ゼロ金利政策である。
第二は、量的緩和政策である
第三は、信用緩和政策である

(3) こうした中では、中央銀行の機能は、金融機関の資金流動性を高める「最後の貸し手」ではなく、金融資産の市場流動性を高める「最後の買い手」と呼ばれる

中央銀行は何を買うべきか
非伝統的金融政策の効果

(1) 資産として満たす条件
健全性、流動性、中立性

(2) あるべき中央銀行の近未来像

8、長期的趨勢と公的債務管理の現状

(1) 中央銀行は、社会の長期的趨勢に合わせた金融政策への変容を余儀なくされる

(2) 少子・高齢化

わが国における65才以上の割合は

1970年	7.1%	(1.0)
80	9.1	
90	12.1	
2000	17.4	(2.5)
2010	23.0	(3.3)
2020	29.1	(4.1)
2050	38.8	(5.5)

(3) 年金制度の破綻

(4) 家計貯蓄率の低下

(5) 予期しないインフレーションのリスク

(6) マクロショック （自然災害）

1970－2012 平均　全世界被災者　1.6億人

1970年と比較して　発生件数で3倍、被災者で2倍

（金融危機）

(7) 日本の公的債務

微分方程式

2019.08.19
2019.06.17
20.10.23

平成29年7月24日

参考図書（Excelで学ぶ微分積分　山本将史著　H24.8 オーム社）
（すぐわかる微分方程式 石村園子著 1997.8 東京図書刊）
（微積分のはなし 大村平著 1985.3 日科技連刊）
（Excelで学ぶ微分方程式　鈴木肇著　H18.2 オーム社）

1．将来予測

(1) 化石－放射性元素

半減期 $y^1=-ky$
減る速度 y^1 は、現在量 y と比例する。
これを積分すると、現在量 y が求められる。$y=C\cdot e^{-ky}$

(2) 刺激と反比例などの微分方程式

① 刺激が変化するとき、その変化に対する敏感度は、もとの刺激の大きさに反比例する。（ポルノ映画の製作会社）、前作より1割以上の興奮度
② 台風の進路予想　ベクトル（その点で進むべき方向と速さ）
③ 解曲線（ベクトルを接線として持つような曲線）
④ 風の流れ、民族の大移動

(3) 限界速度

落下物は空気の抵抗がないものとすると、落下距離の√に比例して落下速度が増大する。

ビルの屋上から落したリンゴの質量を m とすると、その作用している引力は mg(g は、地表付近の物体を引きつける重力の加速度で $9.8\mathrm{m/sec^2}$ である。)

$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$　　$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面へ向う速度の変化率（加速度）

しかし、空気抵抗が落下をやめさせる方に作用する。
空気抵抗の強さは物体の速度が比較的遅いうちは速度にほぼ比例し、物体の速度が速くなると速度の2乗に比例する。
従って、空中を落下する物体がある速度になると、引力と空気抵抗の力がちょうどバランスして、それ以上速度が増大しなくなる。
これを限界速度という。（パラシュートでの落下速度）

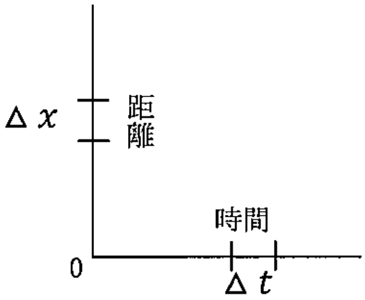
$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt}$　　$k\frac{dx}{dt}$は空気抵抗

$\frac{dx}{dt}$は速度であり、$\frac{dx}{dt}=\mathrm{v}$とすると

$mv=mg-kv$

落下速度

経過時間	t
落下距離	x
落下速度	$\frac{dx}{dt}$
落下加速度	$\frac{d^2x}{dt^2}$



dx — 距離の変化
dt — 時間の変化 …… 落下速度

経過時間 t で落下速度xを微分すると $\frac{dx}{dt}$
例えば $f'x(t) = at^2 + t$ （落下速度）
落下速度xを経過時間 t で更に微分すると $\frac{d^2x}{dt^2}$
例えば $f''x(t) = at + 1$ （加速度）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$はリンゴが地面のほうに向って落下速度を増して行くときの“速度の変化率”つまり、加速度を表わす。

落下速度 $\frac{dx}{dt} = gt(1)$　gは重力
位置の変化 $x = \frac{1}{2}gt^2(2)$
(2)から$t^2 = \frac{2x}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$
これを(1)に代入 $gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{dx}{dt} = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$ となる。
すなわち落下速度は $\sqrt{2gx}$

(空気抵抗がある場合)

m, kは比例定数、$-k\frac{dx}{dt}$ は空気抵抗

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = v$ とすると、

$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ となる。

速度に比例する空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv}$

この両辺をmで割ると、

$\frac{dv}{dt} = \frac{mg-kv}{m} \quad dv = \frac{dt \cdot (mg-kv)}{m}$

$\boxed{\frac{m}{(mg-kv)}dv = dt}$

これは $f(v)dv = g(t)dt$ となる。

左辺はvだけの関数なのでvで積分することができ、右辺はtだけの関数なのでtで積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると、

$\int \frac{m}{mg-kv}dv = \int dt$

$\therefore -\frac{m}{k}log(mg-kv) = t + c$

が得られる。

$\therefore log(mg-kv) = -\frac{k}{m}(t+c)$

$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$

$\therefore v = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$ となった。

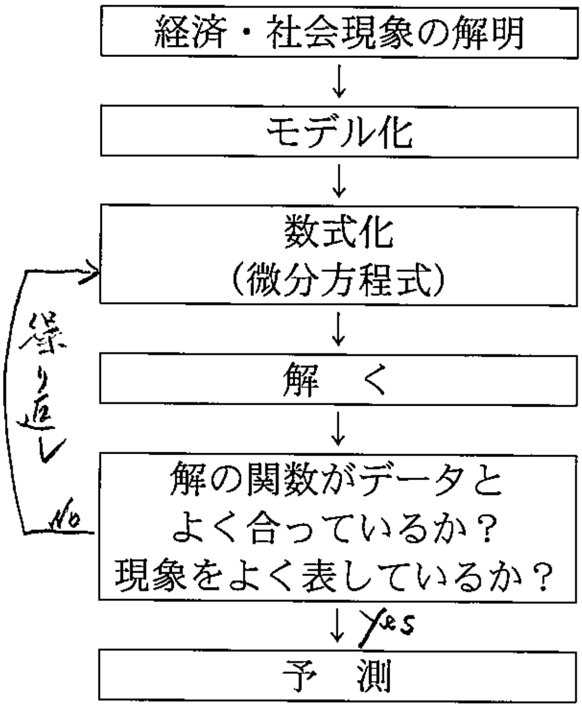
2．コスモスの増え方

(1) 増える割合（Δy）は、その時のコスモスの数（Δx）に比例する。
比例定数はm
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = my$$

(2) x 年目に y 本になったとすると、
$$\frac{dy}{dx} = my$$
初期条件 $y(1)=1$

(3) 解く
$y=e^{m(x-1)}$

(4) 解がデータに合っているか



やり直し

例　題

$y = x^2 + x$が、微分方程式$xy^1-2y+x = 0$の解であることを示す

（y^1を計算して、微分方程式の左辺に代入し、0 になることを示せばよい）

$y = x^2 + x$、$y^1 = \underline{2x+1}$ （$y = \underline{x^2 + x}$）より　　（y^1はyの微分　y' のこと）

$xy^1-2y+x = x(\underline{2x+1}) - 2(\underline{x^2 + x}) + x$

$= 2x^2 + x - 2x^2 - 2x + x = 0$

故に解である。

例　題

$y = e^{2x}$が、微分方程式$y^1-2y=0$ の解であることを示す

$(e^{ax})^1 = ae^{ax}, (\log x)^1 = \frac{1}{x}$

$y = e^{2x} \rightarrow y^1 = 2e^{2x}$なので

$y^1-2y = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$

故に解である。

例　題

$y = 2x^2 - 3x$が、微分方程式$x^2y^{11}-2xy^1 + 2y = 0$の解であることを示す

$y = 2x^2 - 3x \rightarrow y^1 = 4x - 3 \rightarrow y'' = 4$　　（y'' はy^1の微分）

$y^{11} = 4$

なので

$x^2y^{11} - 2xy^1 + 2y = x^2(4) - 2x(4x-3)$

$+2(2x^2 - 3x) = 0$

故に解である。

3．微分方程式の解き方

（代数方程式）

方程式を解く　―　その方程式を満足させる**未知数**を見い出す

（微分方程式）

微分方程式を解く　―　その方程式が成立するような**関数の形**を見い出す

時間 t、速度 v、落下距離 x

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv$　―　①

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg - kv^2$　―　②

のように、導関数を含んだ方程式を、微分方程式という。

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1階の導関数

$\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}$は、2階の導関数

………………………………

$\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}$は、n階の導関数

これに対して、

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1次の導関数

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2$は、2次の導関数

………………………………

$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^n$は、n次の導関数と呼ぶ

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$は、1階1次の導関数

$\left(\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}\right)^3$は、2階3次の導関数

$\left(\frac{d^n\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^n}\right)^m$は、n階m次の導関数と呼ぶ

4． 変数分離形

空気抵抗を受けながら落下する物体の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{mg} - \mathrm{kv}$$

この両辺をｍで割ると

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{mg - kv}{m} \longrightarrow \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Mg - kv}}$$

さらに変形すると

$$\frac{m}{mg - kv}dv = dt$$

これは$\underline{f(v)}dv = \underline{g(t)}dt$の形となっている。

左辺はｖだけの関数なのでｖで積分することができ、右辺はｔだけの関数なのでｔで積分することができる。

両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{m}{mg - kv}dv = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k}\log(mg - kv) = t + c$$

$$\therefore \log(mg - kv) = -\frac{k}{m}(t + c)$$

$$\therefore mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+c)}$$

$$\therefore \mathrm{v} = \frac{1}{k}\left\{mg - e^{-\frac{k}{m}(t+c)}\right\}$$

<u>となり、ｖをｔの関数として表わせる。</u>

<u>これを微分方程式の一般解という。</u>

複利の計算

ある瞬間の現在高に比例して利息が付加されていく場合の総額を$x(t)$で表わし、

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = ax$$

により$x(t)$の変化を明らかにする。

この式は変数分離形の微分方程式で、ｘの関数とｔの関数を

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = adt$と両辺に分離し、

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \int \quad adt$$

$$\therefore \log x = at + c$$

t=0 のとき、x=A として

$$x = Ae^{at}$$

細菌の増殖、細胞の分裂、複利の元利合計など

５．減衰曲線

温度のある物体の温度の下り方

$-\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = kT$、$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = -kT$

Ｔ：外気との温度差、ｔ：時間

ある瞬間の温度差Ｔに比例して、Ｔが減少するので$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$にマイナスがついている。

水中に射し込む光は、途中でだんだん吸収されてしまう。方程式に書けば

$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dx}} = -kB$

Ｂ：明るさ、ｘ：水深

6. 複利計算

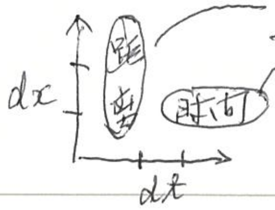
生れたねずみがぜんぶ育つものと仮定すると、1つがいのねずみは1年後には7,000匹、3年後には3億匹に増えるという。

複利で増加してゆく量をｘとすると、
ｘは時間の経過につれて増大してゆく、
ある瞬間にｘが増加する割合は、そのときのｘに正比例する。

すなわち$\frac{dx}{dt} = ax$の関係がある。

元利合計ｘに比例して利息がつき、増加する。

つまり、$\frac{dx}{dt}$は元利合計の増加率（単位期間に付加される利息）を表わし、
ａは利率を、ｘはそのときの元利合計を表わしている。



$\frac{\text{距離の変化}}{\text{時間の変化}}$ → 落下速度

8-2

No.

Date

複利計算

xは時間の経過につれて、どのように増大してゆくか？

ある瞬間にxが増加する割合はそのときのxに比例するので

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax \text{ の関係となる}} \quad ①$$

$\frac{dx}{dt}$ は、元利合計の増加率（単位期間に付加される利息）

aは、利率

xは、そのときの元利合計

xが経過時間tにつれて、どのように変化するかを知るためには、x(t)の関数形（積分できる式）を探し求めればよい。

式①は、xをtで微分した形なので、xの形を知るには、この式をtで積分すればよい筈である。ところが

右辺のxはtのどのような関数かわからないので、dxもdtに小さくても一人前の値として扱うために①式を変形する

$$\boxed{\frac{dx}{x} = a\,dt} \quad ②$$ tとxが微小変化の関係として示される

そして積分する

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt \qquad \int \left(\frac{1}{x}\right) dt = \int (a)\,dt$$

積分を実行すると、

$$\log x + C_1 = at + C_2 \quad となる$$

$$\log x = at + C_3 \quad (C_2 - C_1 = C_3 とする)$$

この式は

$$e^{at+C_3} = x$$

すなわち

$$x = e^{at} \cdot e^{C_3} \quad を表わす。$$

$t=0$ のとき $x=A$ とすると $e^{C_3}=A$

$$x = Ae^{at} \quad の関係となる$$

これが、t の関数としての x の形である。

たとえば、1分あたり $\frac{1}{10}$ の割合で増殖している細菌の一群がある。
1時間後には何倍になっているか

$a = 0.1/分$
$t = 60分$

$$Ae^{0.1/分 \times 60分} = Ae^6 = 403A$$

1時間後に403倍となる。

10日で1割の利上へ

365日でいくらか

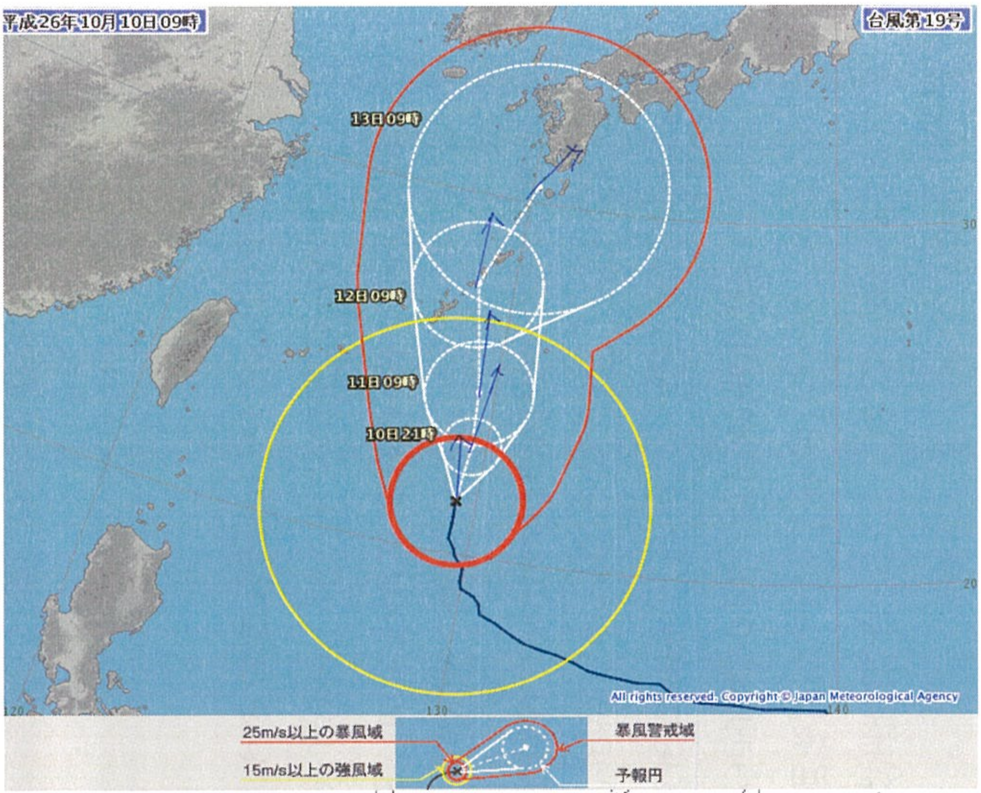
$a = 0.1/10日$

$t = 365日$

$$Ae^{\overset{0.01}{\cancel{0.1/10日}} \times 365} = 38.47A$$

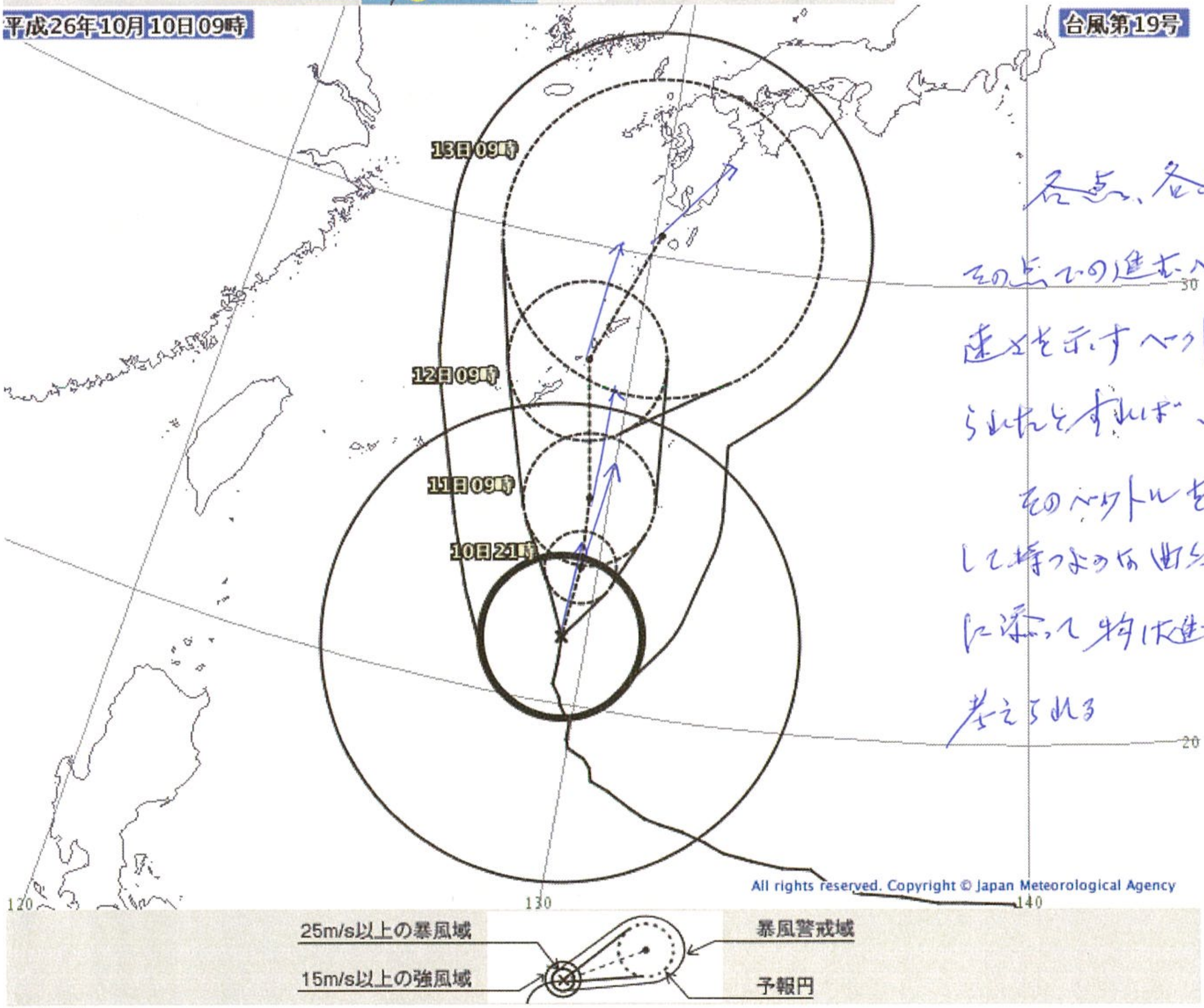
$$1.1^{\frac{365}{10}} = 32.42$$

台風情報



変化する台風の動きを
ベクトルでとらえると

距離
位置
|
速度
|
加速度



各点、各点で、
その点での進むべき方向と
速さを示すベクトルが与え
られたとすれば、
そのベクトルを接線と
して持つような曲線（解曲線）
に添って物は進むだろうと
考えられる

非表示

台風第19号（ヴォンフォン）
平成26年10月10日09時45分 発表

〈10日09時の実況〉	
大きさ	大型
強さ	非常に強い
存在地域	沖縄の南
中心位置	北緯 21度25分(21.4度)

対数関数の微分（導関数を求める）

$$\boxed{\text{導関数の定義式}\quad f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

より

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)/x}{h}$$

← 引き算が割り算に!!

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\boxed{\log_a M^k = k\log_a M}$$

Mのk乗はlog_aMの k倍に!!

ここで、h/x = kとおく、$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$ となる.

ここで、kが0に近づくと、$(1+k)^{\frac{1}{k}}$は、ある一定の数 e に近づく。

つまり、$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$ である。$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$

となり、底 a を e にすれば、$(\log_e x') = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$ となる。

e の登場

$$\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

k を限りなく 0 に近づけていくと ……

k の値	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値
0.1	2.59374246 ……
0.001	2.7169 23932 ……
0.00000000 1	2.71828 2052 ……
↓ 0	$\boxed{e = 2.71818\,1828}$ ……

対数関数の導関数

（自然対数の場合）

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}\log_e e$$

$$= \frac{1}{x}$$

真数の逆数が log の外に

↑

対数は微分すると分数になる

（底が e でない場合）

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

e が真数になる

合成関数

２つの関数 $y=g(u)$、$u=f(x)$ に対して

前者の式に、後者の式を代入してできる関数

$y=g(f(x))$ をいう。

合成関数の導関数

$\{g(f(x)\}' = g'(u)f'(u)$ である。

つまり、合成関数 $y=g(f(x))$ の導関数は、

$g(u)$ を u で微分し、$f(x)$ を x で微分して

得られる２つの導関数の $g(u)$、$f'(x)$ の積である。

対数微分法

$y=x^p$ の微分　　対数で表す

$$\log y = \log x^p = p\log x$$

(左辺)

$\log y$ と $y=x^p$ の合成関数

(xの変化を考えずに
yが変化する関数と
考える
→ yの関数である)

$\log y$ と $y=x^p$ の合成関数

↓ yで微分　　↓ xで微分

$(\log y)'=\frac{1}{y}$　　y'

↓ かけ算

$$\boxed{(\log y)'\cdot y' = \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{y'}{y}}$$

(右辺)

$p\log x$

↓ xで微分

$$\boxed{(p\log x)' = p\cdot\frac{1}{x} = \frac{p}{x}}$$

$y=x^p$

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \text{ より } y' = \frac{p}{x}\cdot y = \frac{p}{x}\cdot x^p = px^{p-1}$$

↓

$$y' = px^{p-1}$$

指数関数の微分（導関数）

指数関数 $y=a^x$ の微分

↓ 両辺を対数で表す（対数微分法）

$$\log y = \log a^x = x\log a$$

① 左辺

$\log y$ と $y=a^x$ の合成関数

↓ y で微分　↓ x で微分

$$(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

② 右辺

x で微分すると

$$(x\log a)' = (x)' \cdot \log a$$

$$= 1 \cdot \log a = \log a$$

$y=x$ なら $y'=(x)'=1$ の公式

↓

$\frac{y'}{y} = \log a$ より　$y' = y\log a$

$$= \underline{a^x}\log a \longrightarrow y' = a^x \log a$$

上記の $y=a^x$

指数関数の微分

指数関数 $y=e^x$ は微分しても変わらない

底が e の場合

$$(e^x)' = e^x$$

微分しても変わらない

底が e でない場合

$$(a^x)' = a^x \log a$$

(老子)

第一章

老子 道徳経 注釈
— WordPress.com

dào kě dào, fēi cháng dào;
道可道，非常道；

道は道であるが
それは本当の道ではない

míng kě míng, fēi cháng míng.
名可名，非常名。

wú míng, tiān dì zhī shǐ;
无名，天地之始；

yǒu míng, wàn wù zhī mǔ.
有名，万物之母。

gù cháng wú yù yǐ guān qí miào;
故常无欲以观其妙；

cháng yǒu yù yǐ guān qí jiào.
常有欲以观其徼。

无欲なら、妙（中心にある貴重なもの）に出会える

有欲なら、徼（中心から離れたもの）に出会う

cǐ liǎng zhě, tong chū ér yì míng, tóng wèi zhī xuán, xuán zhī yòu xuán, zhòng miào zhī mén.
此两者，同出而异名，同谓之玄，玄之又玄，众妙之门。

深い深いところに本当の妙がいっぱいある

これこそが理想の「道」だと言って人に示すことのできるような「道」は、ほんとうの「道」ではない。

玄 xuán　図り知れない深淵

众 zhòng　すべて 一切の

第四章

dào chōng ér yòng zhī huò bù yíng
道冲，而用之或不盈。

yuān xī sì wàn wù zhī zōng
渊兮，似万物之宗。

cuò qí ruì jiě qí fēn hé qí guāng tóng qí chén
挫其锐，解其纷，和其光，同其尘。

zhàn xī sì ruò cún
湛兮，似若存。

wú bù zhī shuí zhī zǐ xiàng dì zhī xiān
吾不知谁之子，象帝之先。

道冲 dào chōng 道は空っぽである

而用之 これを用いると（無尽であって）
或不盈 huò bù yíng 一杯になることはない、満たされることはない

渊兮 yuān xī 底知れずの 渊（フチ）のように（深々として）

万物之宗 万物の根源
wànwù zhī zōng

湛兮 zhàn xī たたえた水のように，湛として

似若存 sì ruò cún 何かが存在しているようだ。

吾不知谁之子， それは何物の子であるかは知らないが

象帝之先 万物を生み出した天帝のさらに祖先

第 五 章

tiān dì bù rén yǐ wàn wù wéi chú gǒu
天地不仁，以万物为刍狗；

shèng rén bù rén yǐ bǎi xìng wéi chú gǒu
圣人不仁，以百姓为刍狗。

tiān dì zhī jiān qí yóu tuó yuè hū xū ér bù qū dòng ér yù chū
天地之间，其犹橐龠乎？虚而不屈，动而愈出。

duō yán shù qióng bù rú shǒu zhōng
多言数穷，不如守中。

天地不仁　tiān dì bù rén

天地の働きに、仁徳（いつくしみ）があるというわけではない

以万物为刍狗　chú gōu

わらで作った犬ころのように扱い、捨てている。

其犹橐龠乎？　qí yóu tuó yuè hū ?

それは、（天と地の間の）鞴（ふいご）のようなものであろうか？

虚而不屈，　xū ér bù qū

からっぽでありながら、

动而愈出　dòng ér yù chū

万物が生まれて　つきはてることがない

第七章

tiān cháng dì jiǔ
天长地久。

tiān dì suǒ yǐ néng cháng qiě jiǔ zhě
天地所以能长且久者，

yǐ qí bù zì shēng gù néng cháng shēng
以其不自生，故能长生。

shì yǐ shèng rén hòu qí shēn ér shēn xiān wài qí shēn ér shēn cún
是以圣人后其身而身先；外其身而身存。

fēi yǐ qí wú sī yé gù néng chéng qí sī
非以其无私邪，故能成其私。

天地 —— 者，

天地が〜であるのは、

以其不自生， yǐ qí bù zìshēng ，故能长生

自分で生き続けようとしないから、 長く生き続けられる

是以圣人后其身而身先：

それ故，聖人は、わが身を人の後におきながら、推されて人に先だち

非以其无私邪，：

それは私利私欲をもたないからであろうか、

故能成其私

かえって自分をつらぬいて行けるのだ

第八章

shàng shàn ruò shuǐ
上善若水。

shuǐ shàn lì wàn wù ér bù zhēng
水善利万物而不争；

chǔ zhòng rén zhī suǒ wù gù jǐ yú dào
处众人之所恶，故几于道。

jū shàn dì xīn shàn yuān yǔ shàn rén yán shàn xìn zhèng
居善地，心善渊，与善仁，言善信，政

shàn zhì shì shàn néng dòng shàn shí
善治，事善能，动善时。

fū wéi bù zhēng gù wú yóu
夫唯不争，故无尤。

处众人之所恶，

多くの人がさげすむ低い場所に止まっている

故几于道

そこで「道」の働きに最も近いのだ

夫唯不争，fū wéi bù zhēng

すべて（水のように）争わないでいることから

故无尤 gù wú yóu

それ故，間違いもないのだ

第九章

chí ér yíng zhī, bù rú qí yǐ
持而盈之，不如其已；
chuǎi ér ruì zhī, bù kě cháng bǎo
揣而锐之，不可长保。
jīn yù mǎn táng, mò zhī néng shǒu
金玉满堂，莫之能守；
fù guì ér jiāo, zì yí qí jiù
富贵而骄，自遗其咎。
gōng suì shēn tuì, tiān zhī dào
功遂身退，天之道。

持而盈之，不如其已 chí ér yíng zhī, bùrúqíyǐ

いつまでも皿を一杯にしておこうというのは、やめたほうがよい

揣而鋭之，chuǎi ér ruì zhī，

鍛えすぎて 刃を鋭くしすぎると、

自遺其咎 zì yí qí jiù

自ら破滅を招く

第十章

zài yíng pò bào yī, néng wú lí hū
载营魄抱一，能无离乎？

zhuān qì zhì róu, néng yīng ér hū
专气致柔，能婴儿乎？

dí chú xuán lǎn, néng wú cī hū
涤除玄览，能无疵乎？

ài mín zhì guó, néng wú zhì hū
爱民治国，能无知乎？

tiān mén kāi hé, néng wú cí hū
天门开阖，能无雌乎？

míng bái sì dá, néng wú wéi hū
明白四达，能无为乎？

shēng zhī xù zhī, shēng ér bù yǒu, wéi ér bù shì, zhǎng ér bù zǎi, shì wèi xuán dé
生之畜之，生而不有，为而不恃，长而不宰，是谓玄德。

载营魄抱一，zài yíng pò bào yī，

迷える
肉体を落ちつけて，一の道をしっかりと守り，

专气致柔，zhuān qì zhì róu，

精気を集中し，身心を柔軟にして、

涤除玄览，dí chú xuán lǎn

心の鏡を洗い清めて

能无知乎，néng wú zhī hū ?

人に知られないでいることができるか？

第十一章

sān shí fú gòng yī gǔ dāng qí wú yǒu chē zhī yòng
三十辐，共一毂，当其无，有车之用。

shān zhí yǐ wéi qì dāng qí wú yǒu qì zhī yòng
埏埴以为器，当其无，有器之用。

záo hù yǒu yǐ wéi shì dāng qí wú yǒu shì zhī yòng
凿户牖以为室，当其无，有室之用。

gù yǒu zhī yǐ wéi lì wú zhī yǐ wéi yòng
故有之以为利，无之以为用。

辐 fú 車輪の輪に向って出ている棒

毂 gǔ 車輪の中心部分

) その中間のなにもない部分

↓

当其无

(その何もない空間)

埏埴 shān zhí 粘土をこねる

凿户 záo hù 室に空間をつくる

↑

有用性はここにある

无之以为用

故有之以为利 何かがあることで利益を受ける。しかし

第 十 二 章

wǔ sè lìng rén mù máng
五 色 令 人 目 盲；

wǔ yīn lìng rén ěr lóng
五 音 令 人 耳 聋；

wǔ wèi lìng rén kǒu shuǎng
五 味 令 人 口 爽；

chí chěng tián liè lìng rén xīn fā kuáng
驰 骋 畋 猎，令 人 心 发 狂；

nán dé zhī huò lìng rén xíng fáng
难 得 之 货，令 人 行 妨。

shì yǐ shèng rén wèi fù bù wèi mù gù qù bǐ qǔ cǐ
是 以 圣 人 为 腹 不 为 目，故 去 彼 取 此。

爽 shuang 狂わせる

驰骋畋猎 chí chěng tián liè 原野をかけまわって、狩猟をすること

妨 fáng さまたげる

为腹不为目 腹を大事にし目を大事にしない
wèi fù bù wèi mù

彼 bǐ 外界のもの
此 cǐ 自身の内部の力

第十三章

chǒng rǔ ruò jīng guì dà huàn ruò shēn
宠辱若惊，贵大患若身。

hé wèi chǒng rǔ ruò jīng
何谓宠辱若惊？

chǒng wéi xià dé zhī ruò jīng shī zhī ruò jīng shì wèi chǒng rǔ ruò jīng
宠为下，得之若惊，失之若惊，是谓宠辱若惊。

hé wèi guì dà huàn ruò shēn
何谓贵大患若身？

wú suǒ yǐ yǒu dà huàn zhě wéi wú yǒu shēn jí wú wú shēn wú yǒu hé huàn
吾所以有大患者，为吾有身，及吾无身，吾有何患！

gù guì yǐ shēn wéi tiān xià ruò kě jì tiān xià
故贵以身为天下，若可寄天下；

ài yǐ shēn wéi tiān xià ruò kě tuō tiān xià
爱以身为天下，若可托天下。

宠辱若惊 chǒng rǔ ruò jīng 寵愛と屈辱

贵大患若身 guì dà huàn ruò shēn 世人は名誉貨財をわが身より貴きもののごとく考えて、種々の災禍をひきおこす