

経済学の数学 (才4回)

2019.07.22
No. 2019.06.23
2019.03.11
Date 2019.03.18
2019.05.20
2019.03.11

参考図書 862.2 岡村宗二著 経済学入門 同文館刊
2000.12 岡部恒治著 経済数学入門 新井社刊
2010.12 竹之内修著 経済学入門 新井社刊

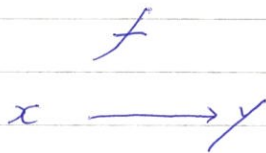
関数関係

$$U = U(x, y)$$

親の所得 x
子供の消費 y

(1) 関数の表示 $f(x, y) = 0$

(2) 関数の表示 $y = f(x)$



ある関係 (f) を通して x と y の関係を示す

$$C = C(Y)$$

消費 C は国民所得 Y に依存して決まる

このとき f のかわりに C を使っている

C が Y と比例関係にある



$Y=0$ のとき $C=b$ とする

$$C = aY + b \quad (a > 0, b > 0)$$

$U = U(x, y)$ の効用関数は、

x と y を消費する (定数) とき、与えられたレベルを介して、

効用 (満足) U が得られる (定数) という関係を示している。

1. 微分係数

No.

3

Date

(1) 経費用関数 $C = \pi(x)$

生産量 x の ごくわずかな増加 による、経費用 C への
増加分 である

x の変化分 $\Delta x = x_1 - x_0$

y の変化分 $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

これは x が x_0 から x_1 に変化 したときの、

y の平均変化率 (average rate of change) である。

(2) 平均変化率

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 差商 (divided difference)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x)$ の x_0 における 微分係数 (differential coefficient)

又は 変化率 (rate of change)

$\Delta x (=h) \rightarrow 0$ とする

$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ は 接線の傾き となる

(2) 基本的な微分の公式

① 和と差の公式

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

② 積の公式

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

③ 商の公式

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

④ 定数倍の公式

$$[kf(x)]' = kf'(x)$$

⑤ n乗関数の公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

3. 合成関数の微分

(1) $y = f(u)$ } 合成
 $u = g(x)$ } 或 $y = f[g(x)]$ とすれば、 y は x の関数で表わされる。

$y = f[g(x)]$ は、2つの関数の合成関数 (composite function) と
 言われる。

例えば、以下所得 y は、投資 i の関数とあり、

投資 i は時間 t の関数とすると

$y = f(i)$, $i = g(t)$ である。
 y は t の関数となつて、
 結局 $y = f[g(t)]$ と表わされる。

この等関数は、

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} \quad \text{と表す}$$

ここで $m = g(x+h) - g(x)$ とおくと

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+m) - f(u)}{m} \cdot \frac{m}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+m) - f(u)}{m} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{と表す}$$

$h \rightarrow 0$ であるから、 $m \rightarrow 0$ である。故に

$$y' = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f(u+m) - f(u)}{m} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right) \quad \text{と表す}$$

10. 偏微分係数と偏導関数

No. 15

Date

(1) ある領域に定義されている関数 $z = f(x, y)$ がある。

独立変数の2次元空間、2次元空間の各変数は定数とみなして、1変数のみの関数になる。

すなわち、偏微分係数 (partial differential coefficient) とは、

$f(x, y)$ の一点 (x_0, y_0) において、

$$f_x(x_0, y_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$f_x(x_0, y_0)$ は、点 (x_0, y_0) における $f(x, y)$ の x に関する 偏微分係数

$f_y(x_0, y_0)$ は、点 (x_0, y_0) における $f(x, y)$ の y に関する 偏微分係数 といふ。

(2) 経済学への応用

① 効用関数は $u = f(x_1, \dots, x_n)$

u : 効用, x_i : 消費財の数量

② 生産関数は、 $z = f(y_1, \dots, y_m)$

z : 生産量, y_i : 生産要素の投入量

③ 効用関数の x_i に関する偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{x_i} \quad i\text{ 財の限界効用}$$

(3) この時の限界効用は、

x_i 以外の変数が変化せず（定数と見て）、 x_i のみが
微小にだけ変化した場合の効用 u の変化分を示す。

このように、経済分析においては、偏導関数を求めることで
断片的に行われる

(3) 1階の偏導関数

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x(x, y) \equiv f_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y(x, y) \equiv f_y$$

(4) 更に偏微分可能ならば、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}(x, y)$$

が得られる

(5) $z = 3x^2 + 2y + 1$ の偏導関数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

13. 経済への応用

(1) 微分、偏微分が、経済学の中でどのように使われているのか。

(2) 1種類の財を生産する企業

生産関数 $y = f(x)$ ----- 増加率递减の法則

x ----- 原料の量

y ----- 生産物の量

原料価格 生産物価格

ここで、原料と生産物の価格をそれぞれ w と p とすると

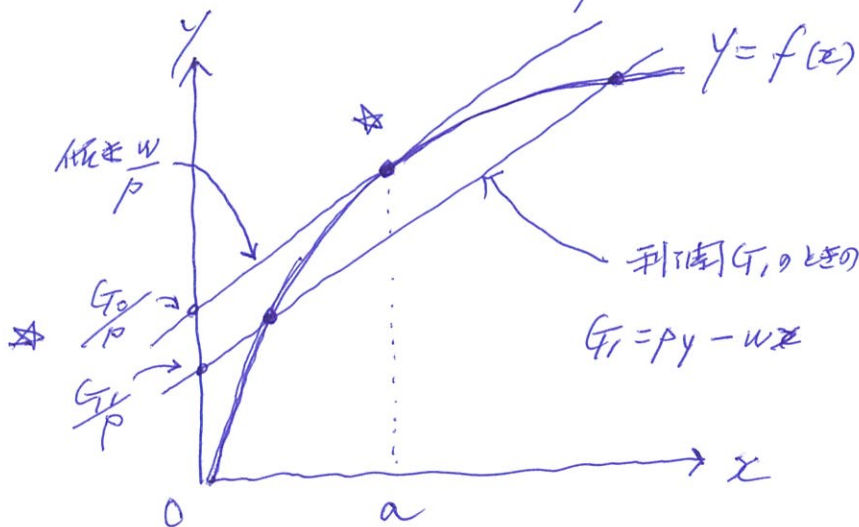
企業の利潤 G は、

$$G = py - wx \quad \text{----- 手帳から覚えておこう}$$

ここで、利潤の最大値を与える原料の量 $x = a$ とすると、

$$pf'(a) = w$$

$$y = f'(a) = \frac{w}{p}$$



グラフは、

G を変化させると、

y と x の $\frac{G}{p}$ が増え $\frac{w}{p}$ で

一定の直線である

y と x の最大値の

G_0 をとると、★、

$y = f(x)$ と接するところ、

接線の傾きは ★ より、 $f'(a) = \frac{w}{p}$

が成り立つ式である。

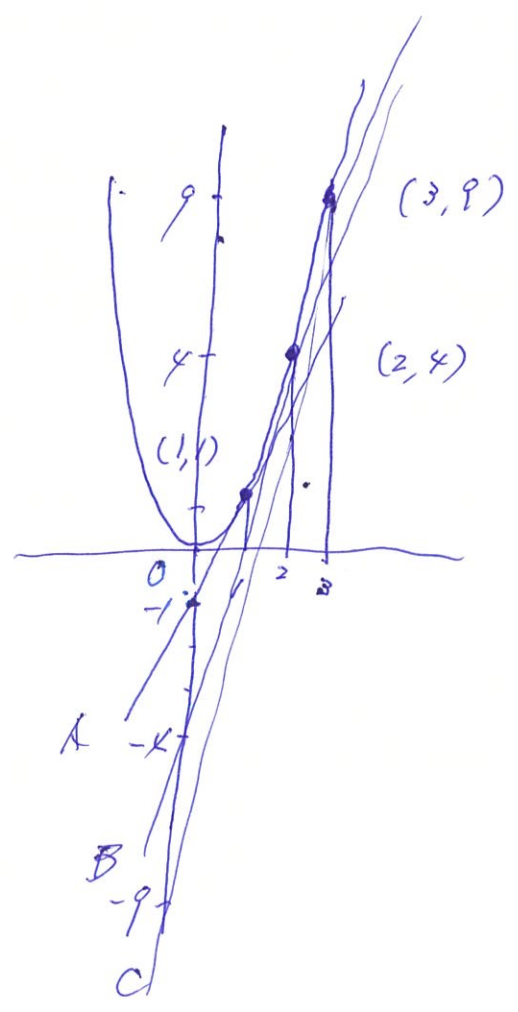
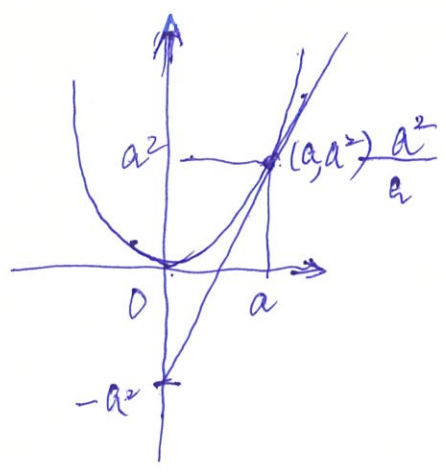
2/ 以下の2次関数のグラフは $y=x^2$ と相似である。

2次関数の微分は、

(1) $y=x^2$ の平行移動

(2) 相似の拡大・縮小 拡大・縮小

22 接線の傾き



接線の傾きは、

Aは傾き(2)
($x \rightarrow 1, y \rightarrow 2$)

Bは傾き(4)
($x \rightarrow 2, y \rightarrow 8$)

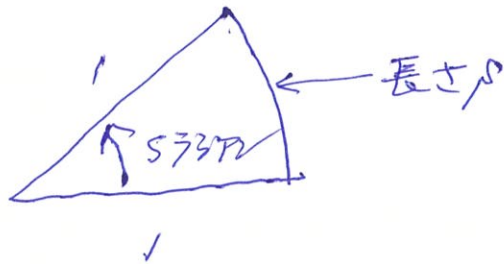
Cは傾き(6)
($x \rightarrow 3, y \rightarrow 18$)

x座標 --- -3 -2 -1 0 1 2 3 ---

接線の傾き --- -6 -4 -2 0 2 4 6 ---

(1) 半径1の円を単位円という

この弧の長さから s のとき、「中心角は s (ラジアン)」という



(2) 単位円 (半径) 1 の円周の長さは 2π から

1回転の角度は 2π (ラジアン) となる
360°

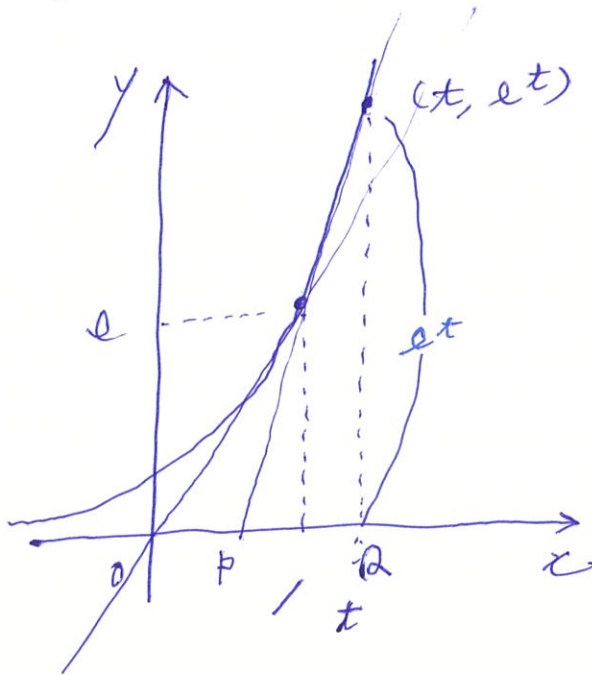
その半分の半円の角度 180° は、 π ラジアン、

更にその半分の垂直の角度 90° は $\frac{\pi}{2}$ ラジアンとなる

(3)

度数(°)	0	30	45	60	90	180	270	360
ラジアン	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

$y = e^x$ の微分



この曲線上の点 (t, e^t) で、接線の傾きは、

x 軸方向に、1進む間に、 y 軸方向に、 e^t だけ上がっている。よって傾きは、

$$0 \rightarrow e^t$$

と、 e^t だけ上がっている。よって傾きは、

$$\frac{e^t}{1} = e^t \text{ となる。}$$

つまり、PQ の "1 た" というのは、接線の傾きが接点の y 座標と等しいことを意味している。

$$f(x) = e^x \text{ だと、} f'(x) = e^x \text{ となる}$$

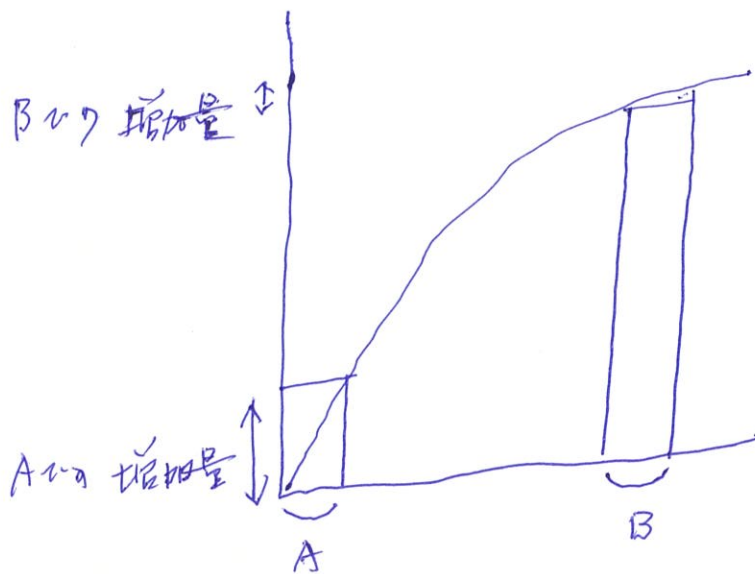
$$\text{これを } (e^x)' = e^x \text{ と表す。}$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x) = f(x)$ となる。つまり $f'(x) = f(x)$ と定まり、 $f(x) = e^x$ となる。

39

増加率逆減の法則

39



増減率の関数

(1) 効用関数・限界効用

財の量が x のときの増減率を示す関数 $u(x)$ を 効用関数 という

財 x を 1 単位増やしたときの $u(x)$ の増加量を 限界効用 という

$x=a$ での 限界効用

限界効用は減少する — 限界効用逆減の法則

(2) 効用関数

$$(1) u(x) \geq 0$$

$$(2) u'(x) \geq 0$$

$$(3) u''(x) < 0$$

増加関数 — 効用関数

“ — 限界効用関数

減少関数 — 限界効用逆減の法則

4.1. 対数関数

41

(1) ウェーバーの法則

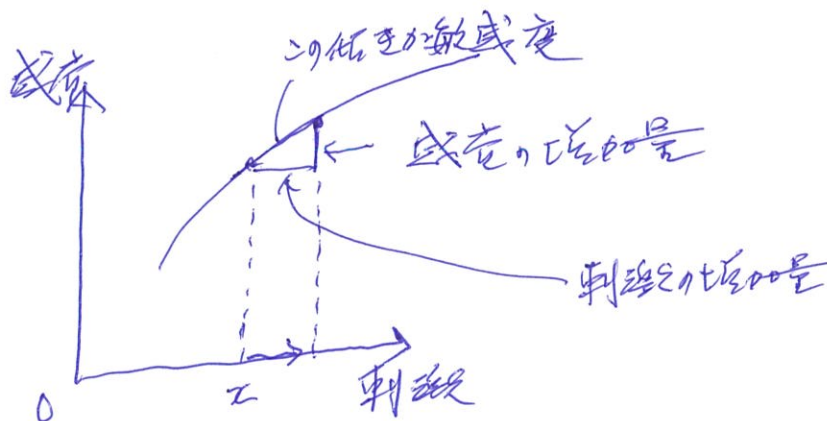
刺激の変化に対する感受度は、その時点の刺激の大きさに反比例する。

(2) 限界効用递减の法則は、

「何か増える」という刺激の変化に対する「満足感の増加」という感受度の関係であって、ウェーバーの法則である。

(3) 刺激の大きさ $x \rightarrow$ 感じる感覚量 $y = f(x)$

感受度は、
$$\frac{\text{感覚(満足)の増加量}}{\text{刺激の増加量}}$$



刺激量の増えを x , y とする

この、 x と y の刺激の量 x に 反比例する y の値を k

$$y = \frac{k}{x}$$

非伝統的金融政策の経済分析

金融政策

2019.07.22

竹田陽介 矢嶋康次 著 2012.11 日本経済新聞

1. 概要

- (1) 1999年2月の日銀による ゼロ金利政策の導入 に乗
世帯は アフラック に対応、非伝統的金融政策 の
発動を余儀なくされた
- (2) 非伝統的金融政策の採用 されて 10年以上経過 (1999-2012)
したが、金融政策上の効果はどれほどあったか、実証的検討
が必要
- (3) 2012年の政権交代
- (4) 日本は、欧米諸国に実施されてきた 非伝統的金融政策 を
はじめ、貨幣という象徴的指標の過剰供給の中で、中央銀行と
民間金融機関による 金融の過剰供給、個人の借入の下に実行に
進められてきた。
- (5) それ以外にも、重病患者の治療に力を入れる医師、治療費の増大
の効果の検証を怠り、治療費を漸次増やしていくように、
是道に転ずる、アフラック 政策判断に導かれ、漸進的に実行
されてきた。
- (6) 非伝統的金融政策は、リスク社会における 社会的リスクの増大 に対応
する必要がある。
- (7) アフラック の原因は、格差の拡大、経済成長の停滞、社会の停滞
投資に必要となる 資金の不足、社会の停滞
これは、沖縄経済における 生産性 (アフラックの金利とインフラの非効率
の低さ) にも関係している。

2. 12 破れん中銀 ありと、

(1) 中央銀行の近未来像について、経済がどう振舞う

(2) 本書のコンセプト 「金融深化」 Financial deepening
をテーマ・コンセプトとする

(3) 中央銀行は、「最後の買い手」として
リスク資産市場を積極的に育成する必要もある

(4) 金融政策と資産形成の問題

(5) ^{の系統}金融政策とは、何を意味するものか

(6) 短期的視点
非伝統的金融政策の類型とその効果

(7) 長期的視点と中央銀行の近未来像
長期的な問題、マクロショック
少子高齢化
地震と自然災害

3. 金融市場との対話、リマンタイムリ政策年表

(1) 日銀 展望レポート等 1998年～ による経済見直し、

(2) サブプライムローン、リーマンショック時の

ジョン・テイラー・スタンフォード大学教授による「フラップ・スワン」

サブプライムローン危機の表明促した 2007.8 時点において、
いくつもの利子率スワップに高騰した

次頁図表参照

(3) 日銀の 1990年代の金融政策の变迁

図表参照

1995年7月から、公定歩合から 無担保コールレートに
操作目標として役割が変化した。

金利による従来の金融政策の限界に差し迫り中、日本銀行は
非伝統的な領域に突入して行く

(4) 速水総裁時代: ゼロ金利政策から量的緩和へと (98/1-0%)

新日銀法が 1998年7月。98年9月には無担保コールレートを
0.25%に引下げ、99年2月には「ゼロ金利政策」を導入した。
政策目標は、金利から量に変更された。

(5) 福井総裁時代: 量的金融緩和の強化 (0%-0.5%)

日銀当座預金の増額 非注用 → 注用

(6) 白川総裁時代: 包括的金融緩和 (0%-1%)

2008.9 リーマンショック 2011.3 東日本大震災

(7) 黒田総裁時代: 量的・質的金融緩和政策 (1%-)

2%の物価上昇目標を2年程度に達成する

図 J-1 「ブラック・スワン」のカウンターパーティ・リスクに与えた影響

前掲表から
170-

2008.9

11-12/2007

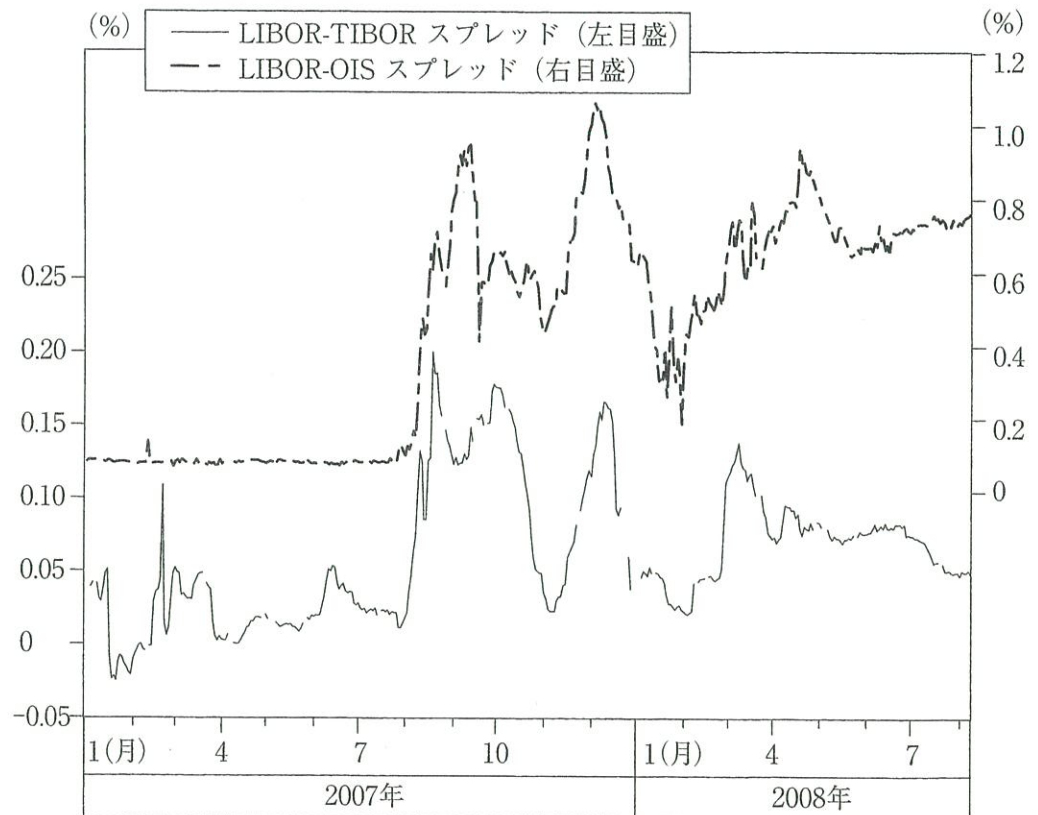
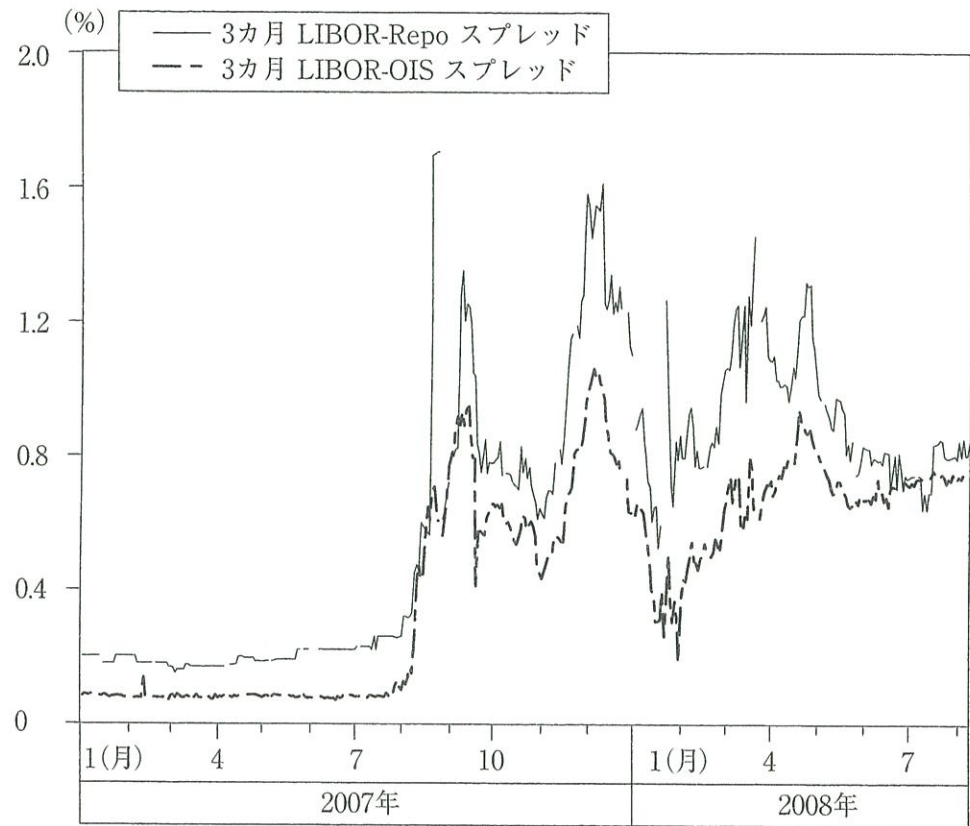
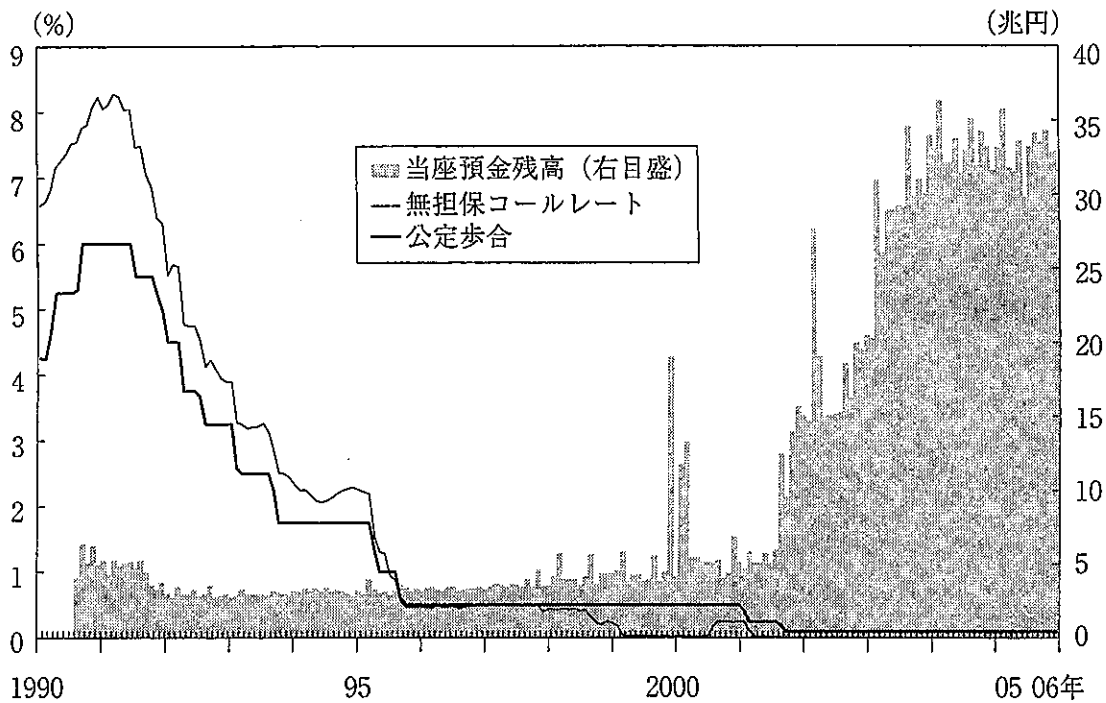


図 J-2 1990 年代の金融政策の変遷



注) 2004 年 3 月以前の当座預金残高は、準備預金残高の数値となっている。

出所) 日本銀行。

き下げが実施され、2001 年 9 月以降 0.1%となっている。

1995 年 7 月からは公定歩合を下回る水準に無担保コールレートの誘導目標が設定され、公定歩合から無担保コールレートに操作目標としての役割がシフトした。金利による従来の金融政策が限界にさしかかる中、日本銀行は非伝統的な領域に突入していく (図 J-2 および表 J-1)。

★ 日本銀行の金融政策の質的転換

(1) 90年代以降の日銀の金融政策は、

ゼロ金利政策、時間軸効果、量的緩和政策の導入、

包括的金融緩和 — という歴史上稀に見る変化であった。

その過程の中で、日銀は政策のコミットメントの強化を意図してきた

このことは、金融政策の金融市場に対して伝達する

メカニズムの質的転換を意味する

表 J-4 グリーンスパン FRB 議長の時代

時期	金融政策	株価	住宅価格
1984年9月20日 ～87年4月29日	金融緩和 (11%⇒6.25%)		
87年8月11日	グリーンスパン議長就任		
87年10月19日		「ブラックマンデー」	
87年10月	金融緩和 (7.25%⇒6.5%)		
88年3月	金融引き締めへの転換 (6.5%⇒9.75%)		
89年6月	金融緩和 (9.75%⇒3%)		
94年2月	金融引き締めへの転換 (3%⇒6%)		
96年12月5日		「根拠なき熱狂」発言	
99年6月	金融引き締めへの転換 (5%⇒6.5%)		
2000年8月		期中最高値	
2001年1月3日 ～04年6月29日	金融緩和 (6.5%⇒1%)		
01年12月11日	FF レート = 1.75%	テロ (2001.9) 勃発 により株価底割れの 危機を迎える	
02年11月6日	FF レート = 1.25%		
03年6月25日	FF レート = 1%		
04年6月～ 06年6月	金融引き締めへの転換 (1%⇒5.25%)		
05年5月20日			グリーンスパンが一部地 域における「フロス」 (泡) の存在を指摘
06年2月	バーナンキ議長就任		
06年6月	FF レートの据え置き		Case-Shiller 指数 (10 都 市) が最高値
07年7月		史上最高値を更新	
07年9月	金融緩和		

前掲書
61頁

図 J-3 株価と金融政策

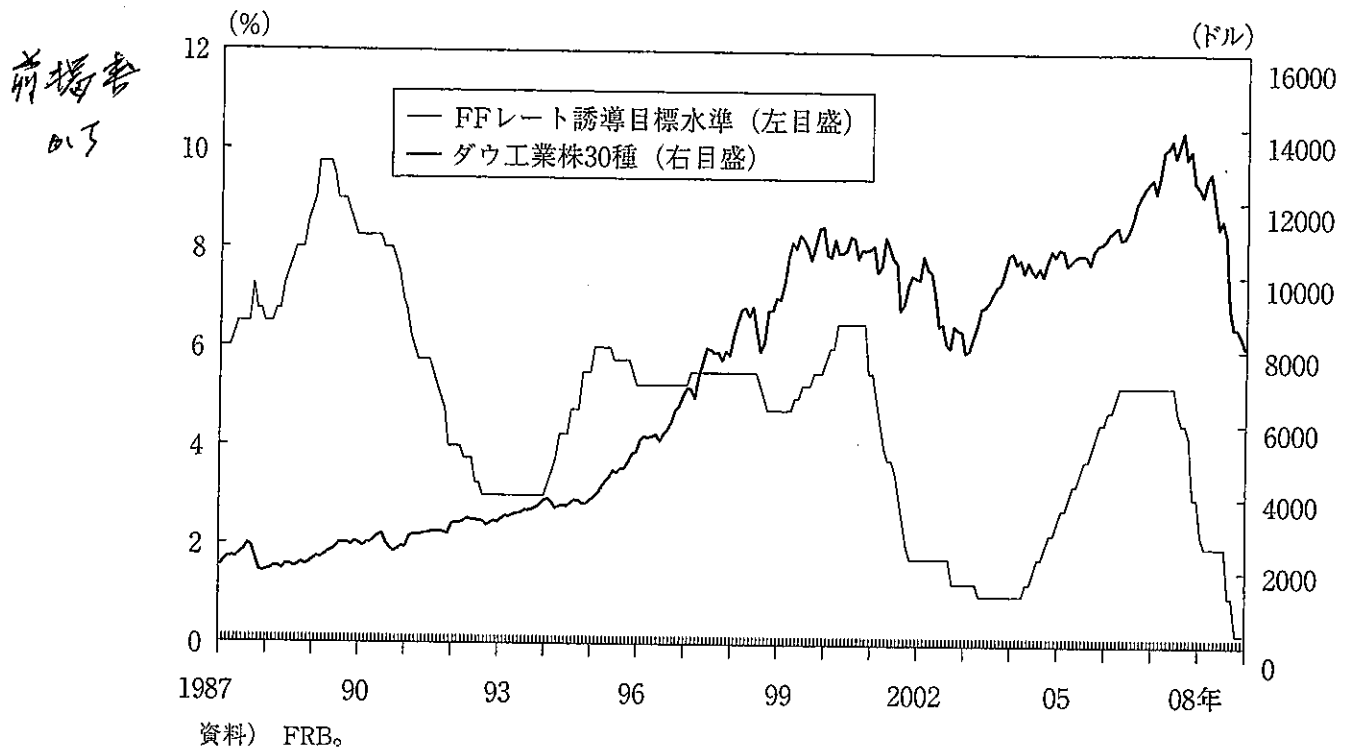
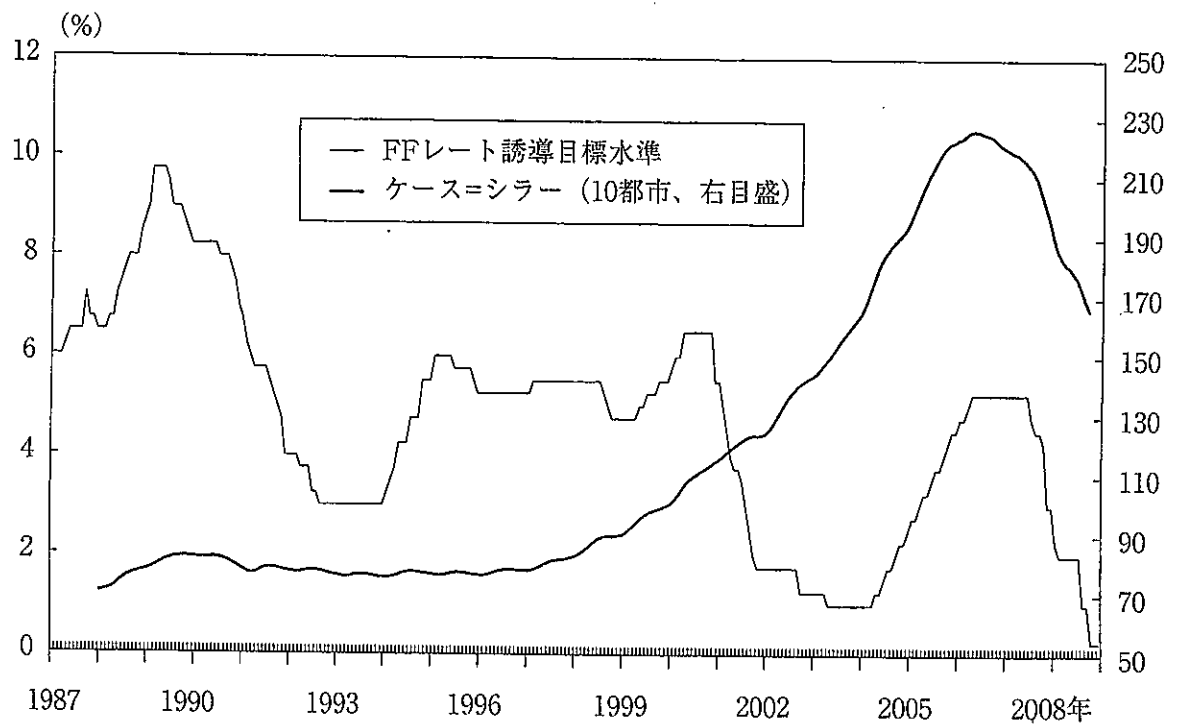


図 J-4 住宅価格と金融政策



5. グリーンスパン議長の下でのFRB

(1) グリーンスパンは、1987.8 ~ 2006.1まで 18年半

FRB議長を務めた

この間は米国の Great Moderation (大いなる安寧) と呼ばれる
低インフレ、安定成長の時期であった

(2) 87、10のインフレマシター、94末のメキシコの金融危機

97のアジア通貨危機などの次々に乗り切った。

その手腕は *maestra* (名指揮者) と称された。

(3) 06.6 に 0.25% の利上げから、(連続17回の利上げ)
5.25% とした。その後 07.8 まで続いた。

(4) この利上げにより、懸念されていた「住宅バブル」が
いよいよ吹き飛ぶことになった。

全米の住宅価格は 06 年 10 年以内で 25% 程度
大都市では、3倍に上昇した。

07 はじめから 下落が始まった

(5) 住宅バブルに対する グリーンスパン主義は、

① バブルの急配が怖いとしても、それを技術革新による
技術進歩の副作用と捉える

② 例え副作用のきついても、バブル潰しに大した効果は期待できない

③ もし引当を行えば、景気安定化を損なうほどの引当が必要である

④ 崩壊に伴う事後の措置、コストの大き過ぎ

6. 資本バブルに対する考え 2002年

(1) FRBの資本バブルに対する考えには二つあり

(2) 一つは、"lean-against-the-bubble strategy"

(後始末戦略 バブルは崩壊するまで放っておく戦略)

(3) 另一個は、"aggressive bubble popping"

(バブルに逆らう戦略)

後始末戦略は危険か?

(4) サブプライムローン危機後の概況

ムササ義 バブル破裂後に「負債デフレ」の状況を生み出す危険性もある。

(5) グリーン・シュローク,

タイミングよくバブルを治癒させるという考えは、FRBに対する幻想である。

ク、非伝統的金融政策の类型

11

(1) 非伝統的金融政策は、伝統的な政策手段であって、超短期の銀行間貸借市場における金利引き下げの下限制とに直面した下の金融政策である。

(2) ① 引き下げ金利政策である。

② ①は、量的緩和政策である。

③ ①は、信用緩和政策である。

(3) さらに申せば、中央銀行が機能は、金融機関の資金流動性を高める「最後の貸し手」としては、金融機関の資金流動性を高める「最後の貸し手」と呼ばれる。

8. 長期的趨勢と公的債務管理の現状

(1) 中央銀行は、社会の長期的趨勢に合わせて金融政策への変更を余儀なくされる

(2) 少子・高齢化

わが国における 65歳以上の割合は 1970年 7.1%

80 9.1

90 12.1

2050 17.4

2010 23.0

2020 28.1

2050 38.2

(3) 年金制度の破綻

(4) 家計貯蓄率の低下

(5) 予期しないインフレーションのリスク

(6) マジョリティア (自然災害)

1970-2012 年 全世界被災者 1.6億人

1970年と比較して 発生件数2.3倍、被災者2.2倍

(金融危機)

(7) 日本公的債務



統計グラフ (視覚による理解)

2019.07.22
H30.12.02
H30.10.01
H30.07.30
H30.04.02
会計と経営のブラッシュアップ
平成29年11月20日
山内公認会計士事務所
2019.05.20

次の本を参考にさせていただきました。

(実務数学講座 実務教育研究所)(統計グラフのウラ・オモテ 上田尚一著 2005.10 講談社)

(予測はハナシ 久村年著 2010.7 日科技連刊)(予測数学のソレ-ズ 田沼晴彦著 2008.1 講談社)

(グラフ読めばハナシ 石村貞太郎著 97.4 日経出版)I. グラフの活用(Excel時系列 石村貞太郎著 02 東京図書)
(Excelグラフ 基本と便利技 AYURA 2008.5 技術評論社)

1. グラフに語らせる (それは気持であり、感覚である)

座標のタテに体重をとり、ヨコの身長をとると、この点一つで人の大きさを読み取ることが出来る。

平均寿命の長短が、幼児死亡率の大小によることの影響もよくわかる。

グラフはいくつかの量の関係を求めたり、それから何かの規則性を発見するのに便利なものである。

2. 片対数目盛りのグラフ

一方の座標が非常に広い範囲に変化するとき、例えばスピーカーの周波数に対する音響特性を示すとき、

周波数 (ヘルツ)	50	100	400	800	1000	1550	5000
音 圧 (デジベル)	-10	-5	+2	0	0	+4	-2

この場合、最小値の原点を 10 ヘルツにとる。従って 100 ヘルツは原点より 1 単位のところ、100 ヘルツは 2 単位、1000 ヘルツは 3 単位と目盛をとる。

3. 円グラフ

4. 関数を与えられたときのグラフ

(1) グラフ用紙のヨコ軸に独立変数 (x)、タテ軸に従属変数 (y) をとる。

グラフの接線

接線を見つける

→ 近づいていく ということ

昔は歴史の中から
司馬遷は、秦や漢の時代の
導関数を取り出して記録した。

より正確に

走
行
距
離

関数(歴史)

極限

導関数(時代)
歴史家

接線とは その関数の
変化の

時間

時速

微分 $f'(x)$ は変化の比である。
その変化の比の(変化の比の)
変化を加える

尤も時間 y を走行距離として $y = f(x)$ を走行距離を表す
関数とすると $f'(x)$ は速度の針を振りこきこに作る。

接線の傾きを見つけることは、

実は走行時間と走行距離との関係から、(関数)

時々刻々と変る速度計の針の動きを取り出したことにある(導関数)

即ち、関数から導関数を取り出したことにある。

— フレキシやマキセルを踏む複雑な動きは、速度計の針の動きに
連動し、それは座標平面上では、走行グラフの接線の傾きの変化
として表わされていくことになる

加速度とは速度の変化の割合である、速度が一定のときは加速度はゼロである。
マキセルを踏むと加速度は①、フレキシを踏むと加速度は②となる

直感の仕組み (大元と類) と 原理の仕組み (7つの類)

3 2乗3乗の法則

ある鳥が相似形の本来長さより大きくなると、
浮力を発生させる翼の面積は長さの2乗に比例して
増大するのに対して、体重は長さの3倍に比例して
増大する。 ----- だから大きな鳥は飞びにくい!!

体重の大きい人の靴はいためやすい。

これは 大きさが 面積に2倍に変わり、
(靴の底) ~~2~~

体積では3倍に効くからである。

(体重)

2乗3乗の原則

4. 3次曲線 (山と谷)

y が x の 3次関数にあるときの一般的な形

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

3次関数の曲線は、

図のように、一つの山と一つの谷
を持っている。

その理由は、因数分解

すると、

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\rightarrow y = (x+2)^{(1)}(x+1)^{(2)}(x-1)^{(3)} \text{ となる。}$$

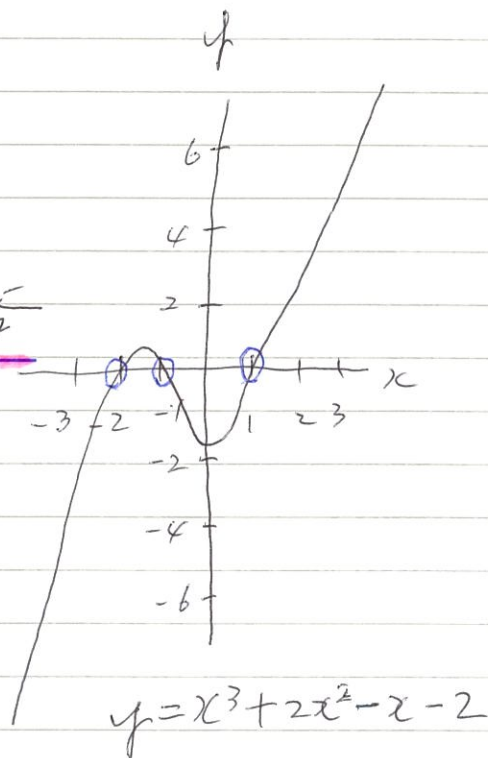
すなわち、() の中から x に代入すれば、

$$\textcircled{1} \quad x = -2, \text{ 代入すれば } \textcircled{2} \quad x = -1, \text{ 代入すれば } \textcircled{3} \quad x = 1$$

のとき $y = 0$ となる

曲線から、3ヶ所から x 軸と横切ることになり、一つの山と

一つの谷からなる



VI 分数関数

No. 5
Date . . .

1. あちらを立てば、こちらが立たぬ

両方立てば、この身が立たぬ

一方の富を x 、他方の富を y 、両者の富の合計を b

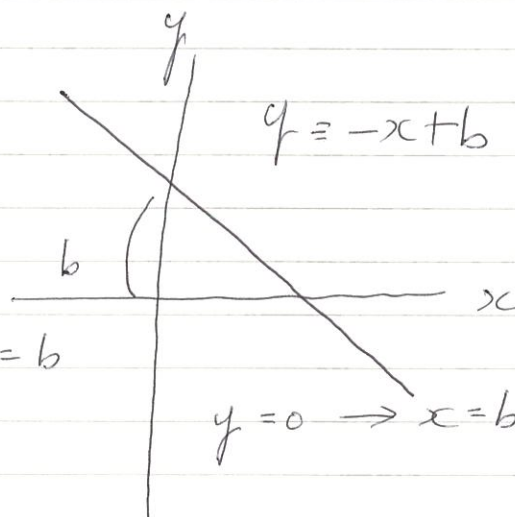
とすれば、

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ y &= -x + b \end{aligned}$$

y を大きくするには、
 x を小さくする

x を大きくするには、
 y を小さくする

y を小さくする . . .



$$y = \frac{a}{x}$$

$\frac{1}{2}$ の 2 倍に なる と 他方は $\frac{1}{2}$ に

$\frac{1}{3}$ の 3 倍 " " $\frac{1}{3}$

" 5 倍 " $\frac{1}{5}$

2 反比例の関係 (二つの世界)

物の売買の場合、物の価格を x とすると
一定の所持金 a を買取れる量 y は、

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{と反比例の関係となる}$$

x がマイナスの大きな値になると

y は小さなマイナスの値、

x がマイナスの値がゼロに近づくと

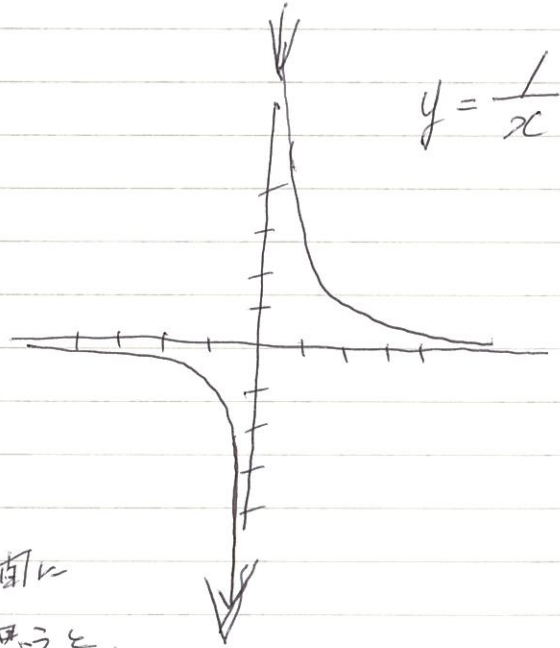
y はどんどん大きくなり、

ゼロの近くに極端に大きくなる。

そして、 x がゼロを通過する瞬間に

y はマイナス無限大になるかと思うと、

こんどはプラス無限大のほうから、忽然と現れてくる。



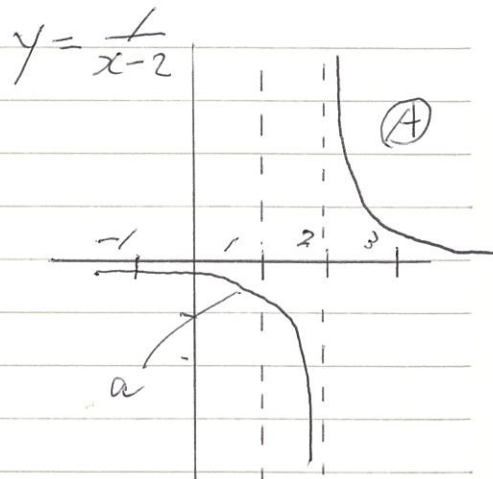
西の地平線に沈んだ太陽が、瞬間！東で昇りはじめた感がある。

—— 不連続な曲線 ——

3. カットオフ曲線 (三つの世界)

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} \quad \text{--- ①}$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

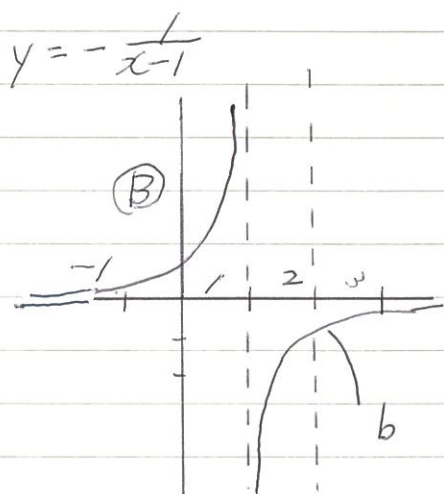


$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{P}{(x-2)} + \frac{Q}{(x-1)} \quad \text{--- ②}$$

とすると

$$\frac{P}{x-2} + \frac{Q}{x-1} = \frac{P(x-1)}{(x-2)(x-1)} + \frac{Q(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{Px - P + Qx - 2Q}{(x-2)(x-1)} = \frac{(P+Q)x - (P+2Q)}{(x-2)(x-1)}$$



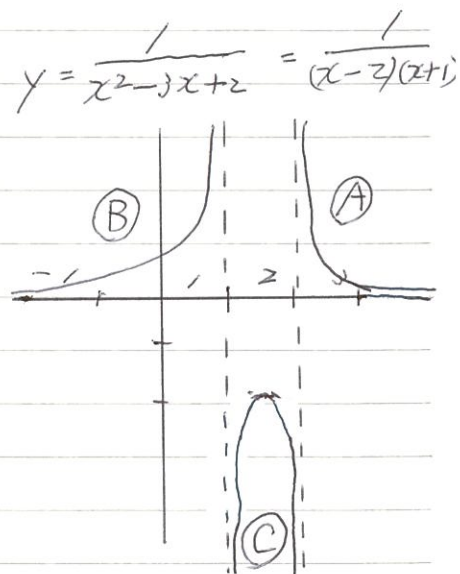
分子を0とすると

$$\begin{cases} P+Q=0 \\ -(P+2Q)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} P=1 \\ Q=-1 \end{cases}$$

従って ①, ②は、

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

とすると



$$a+b=c$$

V 無理関数

No.

8

Date

1. 1対1の対応

$$y = ax + b$$

①

xからyを求めたスタイル

yはxの関数

若くは

$$x = \frac{1}{a}(y-b)$$

②

yからxを求めたスタイル

xはyの関数

②のxとyを入れかえ

$$y = \frac{1}{a}(x-b)$$

③

③は、①の逆関数

という

逆関数は45°の鏡に己の姿を映すかこし

二次関数の場合も

$$y = x^2$$

(但し、 $x \geq 0$) とすると

$$x = \pm\sqrt{y} \quad \text{は} \quad x = +\sqrt{y} \quad \text{となる。}$$

$$y = x^3$$

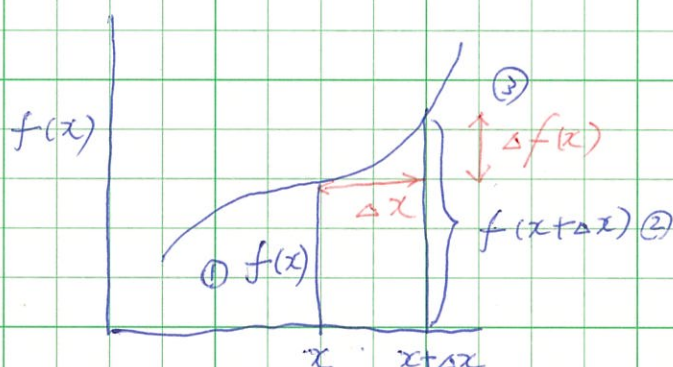
$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$$

微分の物理学的な意味合い

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \Delta f(x)$$

で表わされる



① $f(x)$ に x を代入した値

② $f(x)$ に $x+\Delta x$ を代入した値

③ x を x から $x+\Delta x$ に増やすと $f(x)$ の増加分 $\Delta f(x)$

(1) ある物体の位置 x の時間 t の関数で与り

$x = t^2 + t$ で表わされるとき、

$x(t)$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad \text{となる}$$

← この時間 t とともに変化する速度を表している

(2) 全周の長さ $2L$ である長方形の面積 S は、一辺の長さ x の関数で与り

$$S = x(L-x) \quad \text{で表わされるので、}$$

この極大値を求めたい には、 x で微分し、

$$\frac{dS}{dx} = L - 2x \quad \text{とすると最大値が求まる$$

(3) 箱の体積を最大にするためには、 $V(x) = \frac{S}{4}x - \frac{1}{4}x^3$ という体積を微分して

$$\frac{dV}{dx} = \frac{S}{4} - \frac{3}{4}x^2 \quad \text{を求めよう}$$

三角関数の微分

1-5

作成日

作成者

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \quad ①$$

三角関数の差を積に直す公式

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad \text{を使う}$$

微分の式を $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ とする

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \quad \text{と仮定}$$

①式は $\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \quad \text{と仮定}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad \text{と仮定}$$

$$\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \rightarrow \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

ここ、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \text{ は } \frac{\Delta x}{2} \text{ が } 0 \text{ になるから } = \cos x \quad \text{と仮定}$$

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \text{ は } \Delta x \text{ が } 0 \text{ になるから } = \frac{0}{0} \text{ と仮定} \quad \therefore \text{ここは } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

と仮定して $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$ と仮定

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \quad \therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{と仮定}$$

募 ying mei

匈奴 xiong nu

宛 wan 宛转 wan zhuan 宛然 wan ran

遁逃 dun tao 怨 yuan 抱怨 bao yuan

IV 漢世界の拡大 陇 long 甘肃省の別称

张骞 zhang qian

丝绸之路 si zhou lu

足跡 zu ji 足跡 zu ji

4 267

族の領土内を通過する予定のところ、またまた在したとき単于が死んで、左谷蠡王が太子を攻の妻、および堂邑父(甘父)は漢に逃げ帰るこ朝廷は張騫を太中大夫にのぼらせ、堂邑父に張騫は体力に恵まれ、寛大で信義にあつい人た。また堂邑父は匈奴の出身で弓術に長じ、食だった。

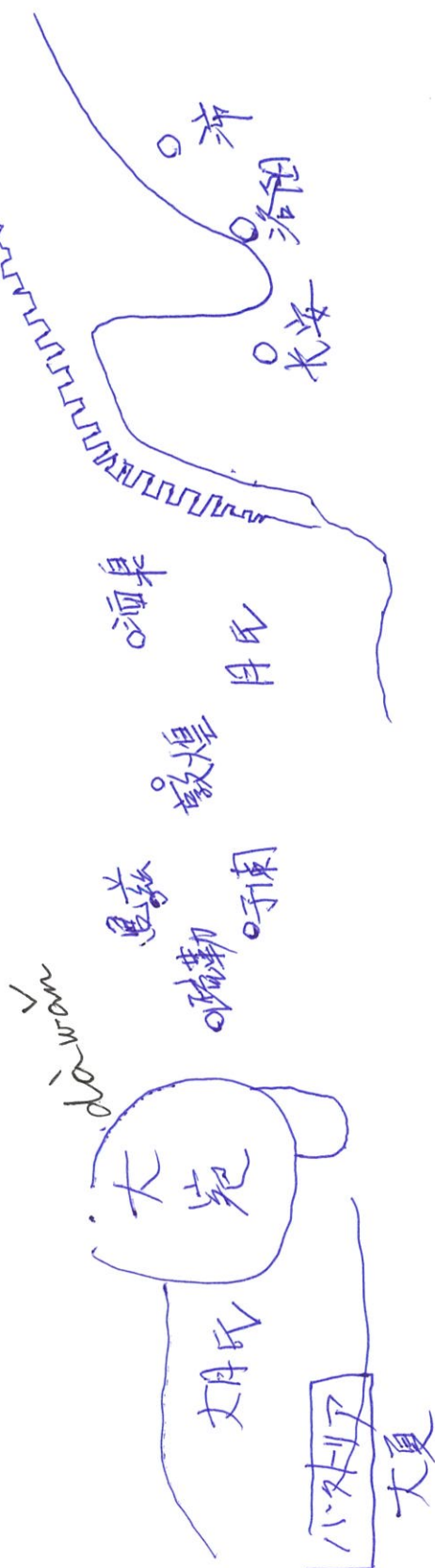
漢を出発した当初、張騫の一行は百人以上の

はこふたりだけであつた。

大宛之跡、見自張騫。張騫、漢中人。建元中爲郎。是時天子問匈奴降者。皆言、匈奴破月氏王、以其頭爲飲器。月氏遁逃而常怨仇匈奴、無與共擊之。漢方欲事滅胡。聞此言、因欲通使。道必更匈奴中、乃募能使者。騫以郎應募、使月氏。與堂邑氏故胡奴甘父俱出隴西。經匈奴、匈奴得之、傳詣單于。單于留之。曰、月氏在吾

郎 月 奴 す 必 募 づ 留

匈奴



大宛 現在のロシア
バクトリア 大夏
(大夏)

羌 羌族

馬

肥饒

抵此 到着

逃亡

郷 同

饒 足

節 (節)jie

匈奴 xiōngnú

益 yì 益益, 越事越

278

北。漢何以得往使。吾欲使越、漢肯聽我乎。留騫十餘歲、與妻、有子。然騫持漢節不失。

を得ん。
を留お
して生

居匈奴中、益寬。騫因與其屬亡郷月氏、西走數十日至大宛。大宛聞漢之饒財、欲通不得。見騫、喜、問曰、若欲何之。騫曰、爲漢使月氏、而爲匈奴所閉道。今亡。唯王使人導送我。誠得至反漢、漢之賂遺王財物不可勝言。大宛以爲然、遣騫、爲發導驛、抵康居。康居傳致大月氏。大月氏王已爲胡所殺、立其太子爲王。既臣大夏而居、地肥饒、少寇、志安樂。又自以遠漢。殊無報胡之心。騫從月氏至大夏、竟不能得月氏要領。

匈奴
い、
を聞き
「なん
而して
れを道
物を賂
遣り、
大月氏
すでに
また自
月氏上

留歲餘、還。並南山、欲從羌中歸、復爲匈奴所得。留歲餘、單于死、左谷蠡王攻其太子自立。國內亂。騫與胡妻及堂邑父俱亡歸漢。漢拜騫爲太

留ま
し、ま
谷蠡王
父とよ

塞曾 *qínshān*

窮 *qióng* 安困

中大夫，堂邑父爲奉使君。騫爲人彊力，寬大信人。蠻夷愛之。堂邑父故胡人，善射，窮急射禽獸給食。初，騫行時百餘人，去十三歲，唯二人得還。

父
夷
き
十

血の汗を流す馬

張騫^{ちやうけん}が實際に足を踏みいれた国は、大宛^{だいえん}・大は主なもので五、六カ国にのぼる。かれは「大宛は匈奴^{きやうと}の西南方、漢の真西に位置し、昭その地の人間は定住して農耕に従事し、稲や飼育しています。その馬は血の汗を流し、先祖に住まいます。支配下の都市は大小ともで七十を使い、騎馬戦を得意とします。大宛の北は唐賓^{てん}（コータン）です。于賓以西の地帯では、川は塩沢（ロブノール）に注いでいます。

烏孫は、大宛の東北二千里ほどのところに住することなく、家畜を追って移動します。こ

22/

大夏は大宛の西南二千余里、媯水の南に位置
ること、大宛の場合と同様です。ひとりの王が
ています。そのため戦闘力は弱く、戦争をおそ
移動してきた大月氏のために打ち破られ、完全
恵まれています。中心都市は藍^{らん}市城と呼ばれ、
大夏の東南に身毒^{しんどく}国（インド）があります」

〈黎軒〉『漢書』などの記事からエジ

プリアの西であるが、これを北とし

騫身所至者大宛・大月氏・大夏・

康居、而傳聞其旁大國五六、具爲天
子言之曰、

大宛在匈奴西南、在漢正西。去漢
可萬里。其俗土著、耕田、田稻麥。
有蒲陶酒。多善馬、馬汗血。其先天
馬子也。有城郭屋室。其屬邑大小七
十餘城、衆可數十萬。其兵弓矛騎射。
其北則康居、西則大月氏、西南則大
夏、東北則烏孫、東則扞^{かん}耆、于^ゆ窠。

旁
曰
こ
か
馬
そ
り
大
西

IV 漢世界の拡大

于^{yū}

五、六、五、六、四



于寘之西、則水皆西流、注西海、其
東水東流、注鹽澤。

烏孫在大宛東北可二千里。行國、
隨畜、與匈奴同俗。控弦者數萬、敢
戰。故服匈奴、及盛、取其羈屬、不
肯往朝會焉。

大月氏在大宛西可二三千、居
水北。其南則大夏、西則安息、北則
康居。行國也。隨畜移徙、與匈奴同
俗。控弦者可一二十萬。故時彊、輕
匈奴、及冒頓立、攻破月氏。至匈奴
老上單于、殺月氏王、以其頭為飲器。
始月氏居敦煌・祁連間、及為匈奴所
敗、乃遠去、過宛、西擊大夏而臣之、
遂都焉耆水北、為王庭。其餘小眾不能
去者、保南山羌、號小月氏。

安息在大月氏西可數千里。其俗土
著、耕田、田稻麥、蒲陶酒。城邑如
大宛。其屬小大數百城、地方數千里、

流れ
烏孫

匈奴

盛ん

大日

の南は

なり。

万ばふ

攻め

頭を

奴の

のか

とな

小月

安

耕し、

大数

の商

銀を

黎軒 エミオのアルケ283
トヤア

身毒口 イ木

最爲大國。臨嬌水。有市、民商賈用
車及船、行旁國、或數千里。以銀爲
錢、錢如其王面。王死輒更錢、効王
面焉。畫革旁行以爲書記。其西則條
枝、北有奄蔡・黎軒。

大夏在大宛西南二千餘里嬌水南。
其俗土著、有城屋、與大宛同俗。無
大王長、往往城邑、置小長。其兵弱、
畏戰、善賈市。及大月氏西徙、攻敗
之、皆臣畜大夏。大夏民多、可百餘
萬、其都曰藍市城、有市販賈諸物。
其東南有身毒國。

大帝の夢

張騫^{ちやうけん}はつぎのように言上した。

「わたくしが大夏^{たいか}の地に滞在中のこと、邛の竹
の人間にどこで手に入れたのかたずねたところ
たものです。身毒は大夏^{たいか}の東南数千里のところ
りありませんが、湿気が多くて暑いそうです。

② 水らの新知識は、武帝の想像を刺激した

IV 漢世界の拡大

このルートの開発は不成功に終わった。しかし、
国があつて、滇越^{てんえつ}国と呼ばれていること、ここ
された。漢はこうして、大夏へのルートを探る

漢は以前にも、西南方面の異民族との通交を
なかつたために、断念していた。が、張騫の「
び西南の異民族との交渉を考えるようになった

騫曰、臣在大夏時、見邛竹杖・蜀
布、問曰、安得此。大夏國人曰、吾
賈人往市之身毒。身毒在大夏東南可
數千里。其俗土著、大與大夏同。而
卑濕暑熱云。其人民乘象以戰。其國
臨大水焉。以騫度之、大夏去漢萬二
千里、居漢西南。今身毒國又居大夏
東南數千里。有蜀物、此其去蜀不遠
矣。今使大夏、從羌中、險、羌人惡
之。少北、則爲匈奴所得。從蜀宜徑、
又無寇。天子既聞大宛及大夏・安息
之屬皆大國、多奇物、土著、頗與中

い
こ
土
象
を
毒
去
て
蜀
大
業

國同業、而兵弱、貴漢財物。其北有
 大月氏・康居之屬、兵彊、可以賂遺
 設利朝也。且誠得而以義屬之、則廣
 地萬里、重九譯、致殊俗、威德徧於
 四海。○天子欣然、以騫言爲然、乃令
 騫因蜀犍爲發間使、四道並出。出駝、
 出罽、出徙、出邛・僰、皆各行一二
 千里。其北方閉氏・笮、南方閉巂・
 昆明。昆明之屬無君長、善寇盜。輒
 殺略漢使。終莫得通。然聞其西可千
 餘里有乘象國、名曰滇越、而蜀賈姦
 出物者或至焉。於是漢以求大夏道始
 通滇國。初、漢欲通西南夷。費多、
 道不通、罷之。及張騫言可以通大夏、
 乃復事西南夷。

大月氏
 むべし
 と万里
 子欣然
 犍爲に
 より出
 二千里
 昆明の
 に通ず
 に乗る
 だす者
 もって
 くして
 と言ふ

張騫ふたたび使者にたつ

張騫は校尉(司令官)として、大將軍衛青の匈奴討

草のある場所を伝って前進したので、水と飼料には

ば軍功をあげたので、单于是父の旧部族民を昆莫族の経済力向上につとめて、周辺の部落を襲撃した。

单于が死んだのをきっかけに、昆莫は膝下の部族の朝貢を拒絶しました。匈奴は遊撃隊をくり出し、昆莫はやはり神の子であつたとして干渉するのをやめます。

さて、現在の情勢をみますに、单于是漢の新たなります。かれら異民族の習俗として、わが漢の物産切り贈物を与えるべきです。これによつて烏孫をばわが国と同盟関係を結ぶのです。烏孫はまちがはずから匈奴の右腕を断つことになるというもの、から大夏にいたる一連の国はことごとく手なずけて

武帝はこの進言にうなずいて、張騫を中郎将に任ず。牛と羊は万単位の数であつた。これに加えて、数王副使を多数随行させて、途上において順次周辺の国

騫以校尉従大將軍撃匈奴。知水草

騫

處、軍導以不乏。乃封騫為博望侯。

もって

是歲元朔六年也。其明年，騫爲衛尉，
與李將軍俱出右北平擊匈奴。匈奴圍
李將軍，軍失亡多。而騫後期當斬。
贖爲庶人。是歲漢遣驃騎破匈奴西城
數萬人，至祁連山。其明年，渾邪王
率其民降漢。而金城・河西西並南山
至鹽澤空無匈奴。匈奴時有候者到，
而希矣。其後二年，漢擊走單于於幕
北。

是後天子數問騫大夏之屬。騫既失
侯。因言曰、臣居匈奴中、聞烏孫王
號昆莫。昆莫之父、匈奴西邊小國也。
匈奴攻殺其父、而昆莫生棄於野。烏
嗛肉蜚其上、狼往乳之。單于怪以爲
神、而收長之。及壯、使將兵。數有
功。單于復以其父之民予昆莫、令長
守於西城。昆莫收養其民、攻旁小邑。
控弦數萬、習攻戰。單于死、昆莫乃
率其衆遠徙、中立、不肯朝會匈奴。

こ
に
し
漢
明
南
到
よ
す
而
往
長
た
の
す
会
な
単

匈奴遣奇兵擊。不勝。以爲神而遠之，
 因羈屬之，不大攻。今單于新困於漢，
 而故渾邪地空無人。蠻夷俗貪漢財物。
 今誠以此時而厚幣賂烏孫，招以益東，
 居故渾邪之地，與漢結昆弟，其勢宜
 聽。聽則是斷匈奴右臂也。既連烏孫，
 自其西大夏之屬皆可招來而爲外臣。
 天子以爲然，拜騫爲中郎將，將三百
 人。馬各二匹，牛羊以萬數。齎金幣
 帛直數千巨萬。多持節副使，道可使
 使遺之他旁國。

夷の俗
 くして
 居らし
 匈奴の
 り、み
 騫を拝
 羊は万
 使多く

張騫の死

張騫ちやうけんはこうして烏孫うそんに到着した。ところが烏孫王
 態度をとった。張騫はカッとしたが、かれらの漢へ
 言った。

「これは恐れ多くも天子からの賜物でありますぞ。
 だきたい」

すると昆莫は、立ちあがって賜物をうやうやし、

天子就賜。王不拜則還賜。昆莫起拜。

筋において統率権を握るにとどまった。

昆莫としてもこうした背景があつたからこそ、張騫である。

このような事情にかんがみ、張騫は副使を大宛^{だいえん}・周辺の国々に分遣した。

昆莫は、道案内と通訳をつけて張騫の帰途を送り、頭を帯同して帰り、かれらに漢の国力の偉大さを並べ、張騫はこのたびの大役を果たしたことによって、それから一年あまりののち、張騫は死んだ。

烏孫の使者は、漢の人口の豊富さと盛んな経済に、烏孫はこれによって漢を重視するようになった。

さらに一年あまりして、大夏をはじめ一連の国、引きつれて帰ってきた。これによって、西北の国、に貢献した最初の人張騫である。張騫以後の使^し意の証明とし、相手国もまたこれによって漢の使^し

騫既至烏孫。烏孫王昆莫見漢使如

騫^{けん}

單于禮。騫大慙。知蠻夷貪、乃曰、

ごとく

IV 漢世界の拡大

賜。其他如故。騫諡使指曰、烏孫能東居渾邪地、則漢遣翁主爲昆莫夫人。烏孫國分、王老、而遠漢、未知其大小。素服屬匈奴日久矣。且又近之。其大臣皆畏胡、不欲移徙、王不能專制。騫不得其要領。昆莫有十餘子。其中子曰大祿。彊善將衆。將衆別居萬餘騎。大祿兄爲太子、太子有子、曰岑娶。而太子蚤死。臨死謂其父昆莫曰、必以岑娶爲太子。無令他人代之。昆莫哀而許之、卒以岑娶爲太子。大祿怒其不得代太子也。乃收其諸昆弟、將其衆畔、謀攻岑娶及昆莫。昆莫老、常恐大祿殺岑娶、予岑娶萬餘騎別居。而昆莫有萬餘騎自備。國衆分爲三。而其大總取羈屬昆莫。昆莫亦以此不敢專約於騫。

騫因分遣副使使大宛・康居・大月氏・大夏・安息・身毒・于寘・扞婁

す
東
烏
ず
の
わ
い
太
死
太
み
に
の
に
む
而
っ
毒