第 6 回　企業価値の評価

（生きた企業をどう評価するのか）

（企業格付の試み）

会計と経営のブラッシュアップ
平成28年9月12日
山内公認会計士事務所

本レジュメは、企業会計基準及び次の各書を参考にさせていただいて作成した。(企業価値評価ガイドライン　日本公認会計士協会編)
(株式・新株予約権の評価と実務マニュアル　茂腹敏明著　2006.4 清文社発行)(M&Aとガバナンス　井上光太郎外著　H18.3 中央経済刊)

Ⅰ　企業価値とは何か

企業格付の試み
山内式の工夫
Yam式

①企業価値とは企業が将来にわたって生み出す価値の合計
②価値とは企業に対する社会の評価の結果

1．企業とは 、継続して 、価値を生み出す　（経営資源の果実）

⑴ 価値を出来るだけ多く 実現し 続けることを目的として設立される
⑵ 価値をあげ続けるためには社会に対して役立たなければならない
⑶ 「企業価値を創造せよ、さもなくば撤退せよ」とは、⑴、⑵を要約したものでいつの時代にも変わらない原則である。

会計は企業価値の表現と報告であるべき!!

2．ライブドアや村上事件は、継続的価値（企業価値）を目標としたか

ニッポン放送に対する敵対的ＴＯＢ（株式公開買い付け）は、企業価値を充分に高めて経営を行っていない企業に対して、株式を買い集め、その経営権を握って**企業価値を高めよう**とする者からの買収攻撃でもあった。

村上ファンド（非効率な企業経営を行う企業に対し「**もの言う株主**」として資産の有効活用による企業価値の向上等を提案した）はライブドア代表者らからニッポン放送株式の獲得（目標3分の1）の情報を得て、同株の買付を行ない、ライブドアの株式取得中（5%）に株式を売却して利益を得た。
H21.2.3 東京高裁は村上世彰氏の**インサイダー取引**を認定し、懲役2年（執猶3年）及び罰金300万円、追徴金11.49億円の判決を言い渡した。

3．企業価値の評価に関する変化

⑴ 会計制度の改革

会計基準の国際的統合化の波。
連結決算中心主義、年金負債等のオンバランス化、金融商品の時価評価等。
海外と同一尺度で計られることとなった日本企業の財務。

⑵ 株式所有構造の変化

従来日本企業は、事業法人や金融機関などの**安定株主**の存在（持ち合い株）により、他企業からの買収の脅威の少ない経営をすることができた。
しかし、それは必ずしも企業価値の最大化を目指すことに適合しない。

⑶ Ｍ＆Ａの増加

グローバル競争の激化に伴い、もはや一企業の競争力では市場に生き残って行けない。企業価値を充分に高めなければ**敵対的Ｍ＆Ａ**の標的となる。

4．企業買収の脅威

（経営資源の集約）

⑴ 株式持合などによる安定株主の変化　（株式所有目的の明確化）
⑵ 株式交換による買収資金の不要化、容易化
⑶ 終身雇用制など日本的経営の崩壊による人事制度や環境の変化

⑷ 企業の評価

企業は日々動いている。会計とはその生きた企業を写し出す技術である。企業評価とは企業の価値をとらえることであり、企業の**過去の情報**（資産の成長性、収益性等）と**現在の情報**（他社との比較、資産活用の効率性、リスク評価等）と**将来の情報**（事業計画、将来予測等）の適正な収集と適切な評価である。

評価項目	過去	−	現在	−	将来
財　産					
事　業					
収　益					
リスク	△		○		◎

会社の構成
(ほされた会社を写し出すために)

資産の構成	借入金
	株主

どのような
・財産
将来性
取引先

主要な借入先
仕入先

主要なオーナー

事業活動の概要
沿革の状況

①会社の将来がわかる
②会社のレベルがわかる

5．公正価値とは

金融商品の市場価額、資産の証券化、企業の評価などにおいて、**公正価値**が要求される。

(1) FASB、IASBの定義「測定日における**市場参加者の秩序ある取引**のなかで、ある資産を売却することで受取るであろう価格、あるいはある負債を移転することで支払うであろう価格、時価が想定される

(2) **公正価値**
一般的には**時価**である。多数の売手と買手が**経済合理性**により**市場を通じて取引**するときの価格によって資産を評価した額をいう。活発な取引が成立する市場等の存在により、**客観的妥当性**が存在すると考えられる。

(3) **いかに公正価値を見積るか（企業評価の場合）**

①**コスト・アプローチ**
時価純資産評価額である。
すべての資産項目と負債項目の時価を個別に評価して、その差額である時価ベースの純資産を株主価値とする評価方法。

②**インカム・アプローチ**
過去及び将来の利益（**年間基準利益**）を計算し、資本還元率（マーケットリスクプレミアム）で資本還元する方法である。一連の予測経済利益を**適切な割引率または資本還元率**によって**現在価値**に割引いて算定する。

③**マーケット・アプローチ**
公開会社の場合には時価である「**市場株価方式**」を適用し、未公開会社の場合には「**類似公開会社方式**」又は「**類似取引方式**」を適用する。
マーケット・アプローチの利点は、実際の株価、取引額に基づいているという実証的な面はあるが、欠点としては、類似公開会社又は類似取引の選定などの困難な点がある。

客観性のある評価
行い得るか？

(4) **リーマンショック**
2008年9月の金融危機による**金融市場の機能不全**は、公正価値会計に対する不信を起こした。
IASBは同年10月に「**市場が活発でない場合**の金融商品の公正価値と開示」を公表し、市場が活発でない場合には、市場価格をベースとした**修正理論価格**といった合理的に算定された価額を開示し、公正価値とすべきとした。

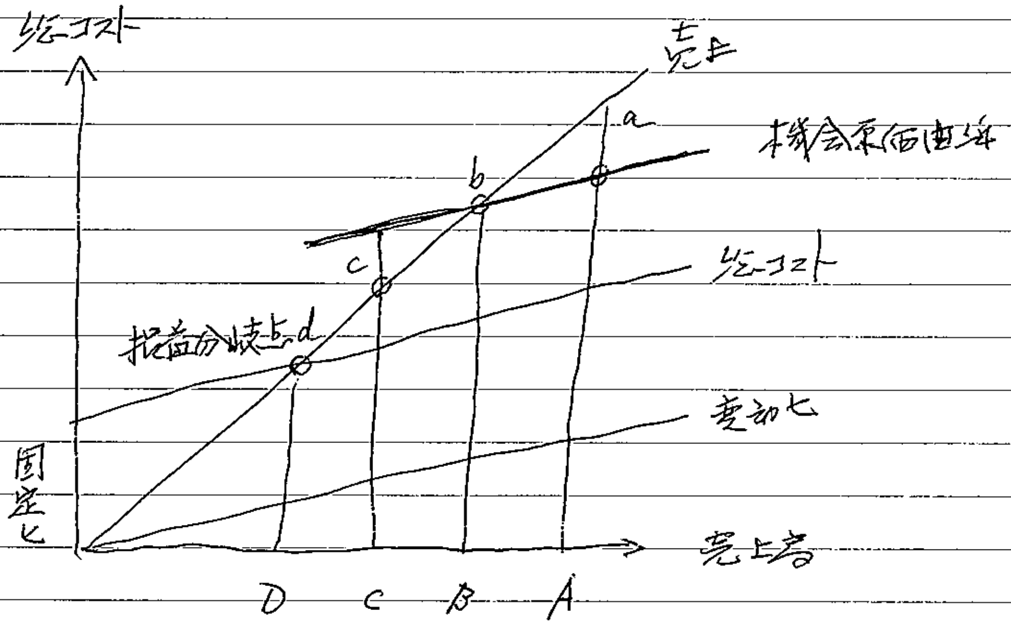
企業評価が経営資源の実態などより景気に左右される

機会原価と機会利得

高田直芳著 戦略会計入門 2007.9 日本実業出版社刊 より

（機会利得とは）

損益分岐点の総コスト線を上回る機会原価曲線



a ： 業界平均超過利益　売上高 A のとき　（機会利得発生）

b ： 業界並利益　〃　B　〃　（機会利得ゼロ）

c ： 業界平均不足利益　〃　C　〃　（機会損失発生）

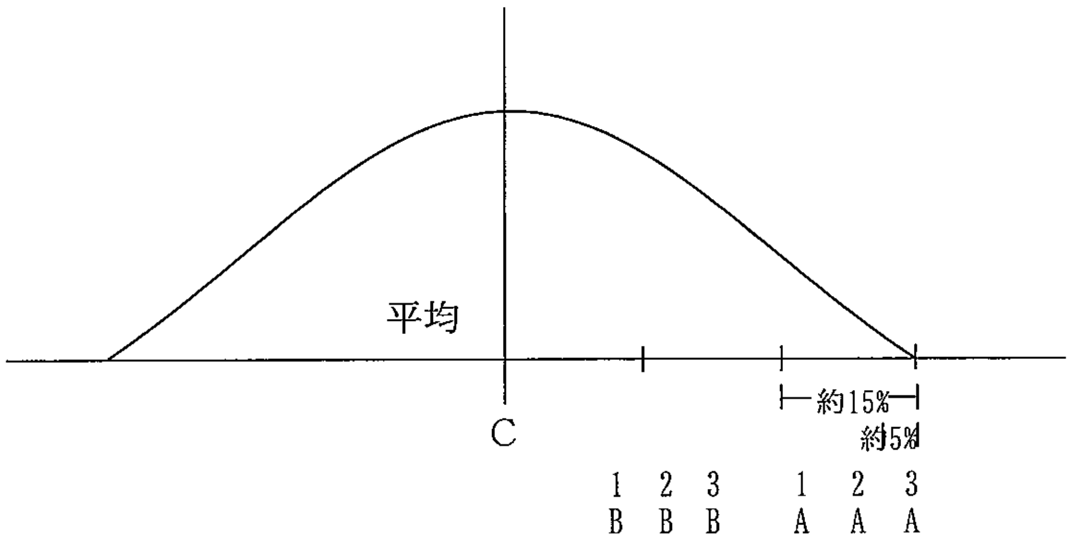
d ： 損益分岐点　〃　D　〃

格付の概要説明

格　付	比　率（%）	概要説明
平均値	50	平均値を仮定（評点）
C	50未満	平均以下企業
1B	50～60 〃	平均的企業（0）
2B	60～70 〃	平均的企業（1）
3B	70～80 〃	平均的企業（2）
1A	80～90 〃	優良企業（3）
2A	90～95 〃	優良企業（4）
3A	95～100	優良企業（5）

(山内公認会計士事務所企業格付表)

標準正規分布曲線(イメージ)



格付に当っての判定基準

(1) 定量的(具体的)分析
資金及び財務実績数値の検討、判断

(2) 定性的(感性的)分析
損益分岐点、収益力、販売力、技術力のレベルの判定

(3) 総合的(専門家的)分析
企業の発展性、継続性及び企業の潜在的能力の検討
経営者の資質、企業の社会性

Ⅴ　インカム･アプローチの検討

1．計算の方法

評価対象会社のキャッシュ･フローないし利益に基づいて評価額を計算する。
将来期待される収益獲得能力を評価額に反映するために、
(1) 評価会社の将来見積を基礎として、(2)市場の割引率を基準にして、割引還元する。

2．問題点

(1) 事業計画等の将来情報の確実性(恣意性の排除)
(2) 諸々の期待値に対する仮定の客観性
(3) 株主資本コストの妥当性
(4) 加重平均資本コストの妥当性
(5) 株主価値算定の妥当性

フリー･キャッシュ･フロー法（DCF 法）の基本式

$$V_0 = \frac{FCF_1}{(1+k_w)} + \frac{FCF_2}{(1+k_w)^2} + \frac{FCF_3}{(1+k_w)^3} + \cdots$$

$$= \frac{FCF_1}{(1+k_w)} + \frac{FCF_2}{(1+k_w)^2} + \cdots + \frac{FCF_n}{(1+k_w)^n} + \frac{TV}{(1+k_w)^n}$$

V_0　：評価時点（第１期首）の事業価値
FCF_t：t 期の営業フリー･キャッシュ･フローの期待値
k_w　：加重平均資本コスト（WACC）
TV　：ターミナル･バリュー（終価）、n＋1 期以降の FCF を n 期末時点に割り引いた価値

加重平均資本コスト

ⓐ税引後割引率

$$k_w = \frac{E}{E+D} \cdot k_e + \frac{D}{E+D} \cdot k_d \cdot (1-t)$$

k_w	：	加重平均資本コスト
E	：	株主資本価値
D	：	負債価値
k_e	：	株主資本コスト
k_d	：	負債コスト
t	：	税率

ⓑ税引前割引率

$$k_w = \frac{E}{E+D} \cdot \frac{k_e}{(1-t)} + \frac{D}{E+D} \cdot k_d$$

□ 税引前 CF には、税引前割引率を、税引後 CF には、税引後割引率を使うことに注意
(ex. 日本の固定資産の減損に用いる割引率は税引前と規定されているので、割引前 CF を使う)

株主資本コスト

ⓒ

株主資本コストの算定式
$k_e = r_f + \beta \times (r_m - r_f) + S_p$
k_e　：株主資本コスト r_f　：安全利子率(リスクフリーレート) β　：個別株式のベータ r_m　：株式市場収益率の期待値 $r_m - r_f$：市場リスク･プレミアム S_p　：個別リスク･プレミアム

（日本公認会計士協会編　企業価値評価ガイドライン）

疑問点
1.ⓐとⓒの組合せで OK（ⓒは税引後と考える）
2.ⓑとⓒの組合せの有無?

マーケット･アプローチの一般的な論点

評価法及び論点	論点の概要
市場株価法 　採用する株価期間	・市場株価が評価対象会社の客観的価値を反映していると認められるか(反映していないと認められる特段の事情の有無)。 【特段の事情の例】 　▶特殊株主による買占め等による異常な株価形成 　▶業績修正発表等による一時的な株価の異常変動 　▶取引が少ないことによる価格形成の歪み　など ・評価基準日以前のどの位の期間の株価を平均するか(1か月、3か月、6か月等)
平均株価の算定方法	・市場株価終値の単純平均値とするか出来高加重平均値とするか
プレミアム/ディスカウント	・支配権に係るプレミアム(コントロール･プレミアム)付加の要否･割合　など
類似上場会社法 　類似上場会社選定の合理性	・評価対象会社と類似上場会社の類似性、選定の合理性
採用する倍率	・EBIT倍率、EBITDA倍率、PER倍率、PBR倍率等のどの倍率を採用するか
採用する株価期間	・評価基準日以前のどの位の期間の株価を平均するか(1か月、3か月、6か月等)
プレミアム/ディスカウント	・支配権に係るプレミアム(コントロール･プレミアム)付加の要否･割合 ・非上場株式の場合の非流動性ディスカウントの要否･割合　など
類似取引法 取引事例法(取引事価額法)	・取引の類似性 ・採用し得る取引情報が少ない、詳細情報の入手が困難　など

(日本公認会計士協会編　企業価値評価ガイドライン)

(11)

第11回　われわれの計画は何か　？

㉕㉖　（計画と未来）

会計と経営のブラッシュアップ
平成28年9月12日
山内公認会計士事務所

1．未来は予測できないことの認識（ドラッカー 5important questions から要約）

計画で未来を決めることは馬鹿げたことである。セントオーガスティンが言ったように、「未来を祈ってもよい、しかし**成果のために働け**」である。ドラッカーが言うように、「計画どおりにはいかない。計画どおりにいくと思うのは愚か者である。**未来は誰にもわからない。**」

2．ヴィジョン（目標）は行動を決めることができる

一つの目標にしぼる

目標は包括的で、一つのものである。**もし 5 つの目標があれば、**なにも無いのと同じである。例えば、「健全な社会の構築と人生の質の向上」といった感じのものである。**しかし、目標は結果に対する行動と資源の効率化を絞り込む。**そして未来を形造ることができる。

3．博物館の例

ヴィジョン：　世界的な多様性のある文化遺産による人々の心の向上
ミッション：　人々をここに集める
ゴール１：　文化遺産の収集活動
ゴール２：　展示による人々の新しい発見の促進
ゴール３：　来館する人々の拡大のための活動
ゴール４：　文化遺産及び設備の維持管理
ゴール５：　長期的な財政基盤の維持

4．効果的な計画のための５つの要素

廃　　棄：　時間を使わない仕事、対象の決定、中止する仕事をさがす
集　　中：　集中が仕事を強化する、最大の成果は集中から得られる
イノベーション：　明日のための本質的な仕事、明日のための機会を見つけ、働く
リスクテイク：　極度に保守的にならない、長い目で見て正解に向かって失敗から学ぶという態度
分　　析：　実施したことの分析、実施したことの評価と改善

知恵、情報

知識

データ

13-2

Next Society P. 3

情報が生産要素となるような社会

1. 異質の次の社会 — IT化とグローバル化によって経済セナ接続するというような ニューエコノミーではない

2. 人口構成の変化と雇用形態の変化

高齢者人口の急増と若年人口の急減

フルタイム労働者を前提としてはいけない

若年人口の急減は、ローマ帝国崩壊以来のことである

3. 消費市場は、若年市場中心から

中高年中心の市場となる

4. 知識社会の特色

(1) 知識は容易に移動する

(2) 上への移動が容易になる。(知識は万人に提供される)

(3) 競争社会、万人が勝てる訳はなく (成功と失敗の並存)

(4) ITが重要な影響をもたらす

(影響はグローバルレベル)

13-2-2

グローバル企業の未来像　　　p.241　(P.8)

1、いまから15年後のグローバル企業は、戦略によって一体性を保つ
(株式保有ではない)　所有、支配の形が変わる

2、明日のトップマネジメントは、現在の延長線上にない
現場のマネジメントとは異なる独立した機関となる
最も重要な仕事は、短期と長期のバランスをとること

3、社会を変える少子高齢化

4、年金と移民の問題
(財政と労働力不足の問題)

5、今後50年間、日本は年間35万人の移民を必要とし、
労働人口の減少を防ぐためには、その倍を必要とする

人口変化に気をつけよ　p.250（p.17）

1. 人口の予想もしない方向に変化する

1920年半ばの最初の少子化（第一次大戦後の景気の過熱と不況）

1940年代のベビーブーム（第二次大戦における社会の発展と日本）

米の出生率は1.8から3.6へ

しかし、1960年から予想に反する少子化が始まった。

出生率は3.7から1.8へと急落

そして、1970年代に始まった大量移民による1990年代のベビーブーム

2. 人口構造の変化これ、Next Societyにおいて

最も重要な要因であり、最も予測しがたく管理できないもの

3. 製造業雇用者の減少

工場労働者は、50年前には労働人口の35%を占めていたが

2000年の現在、100年前の15%に戻った。

(マネジメント・エッセンシャル版　145～148 頁)

チームワークこそ組織の武器である。

○ **組織の目的**は、凡人をして非凡なことを行わせることになる。天才はまれであり、あてにできない。凡人から強みを引き出し、他の者の助けとすることができるか否かが、組織の良否を決定する。同時に、組織の役目は人の弱味を無意味にすることである。

○ 成果中心の精神を高く維持するためには、配置、昇給、昇進…など**人事に係る意思決定**が、**最大の管理手段**となる。それらの意思決定は、最大の管理手段である。組織の人々に対し、マネジメントが本当に欲し、重視しているものが何であるかを知らせる。

ドラッカーの言葉の数式化

（10 月のごあいさつ）

平成 25 年 10 月 1 日（火）

10 月になってもまだ暑く、秋が北からおりてくるのは時間がかかるようです。

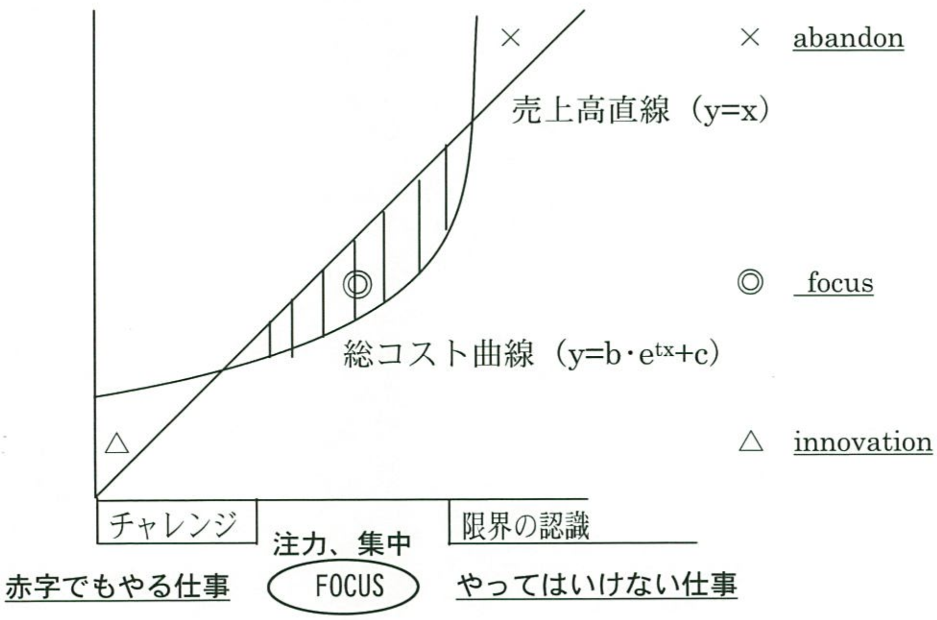
先日、神戸で開催された日本公認会計士協会の研究大会に参加した。そこで選択受講した**公認会計士高田直芳先生の「管理会計と原価計算の革新を目指して」という講義**を拝聴して、これは**ドラッカーの考え方の数式化のヒント**ではないかと感じた。

高田先生のお考えは、企業活動は y=x のような一次式や単利計算的発想では理解したり、把握することはできない。**企業活動は日々複利の連鎖にあり、その活動コストは複利計算を内蔵し、複利的な成長を遂げるものである。**企業業績が向上するときコストやキャッシュは複利的に増殖し、業績が悪化するときコストやキャッシュは複利的に減衰する。**費用関数は直線形ではなく、曲線形や非線形の指数関数 $y=b\cdot e^{tX}+c$ 等で描かれる**べきだというものであった。

これは、ドラッカー経営学の数式化でないか。ドラッカーが傾向値(トレンド)を論じ、電信電話会社の事業は**通信ではなくサービス**であるとし、キャデラック事業部は顧客に**自動車**を売っているのでなく、**ダイヤモンドやミンクのコートのようなステータスシンボル**を売っているのだと解説するとき、その言葉や考え方には数式があり、その数式は直線形だけではなく曲線形も含まれている筈だ。

例えば次のような感じである。

費用・コスト・努力とそれを超える成果・売上高の関係



コストは曲がっている
指数的である

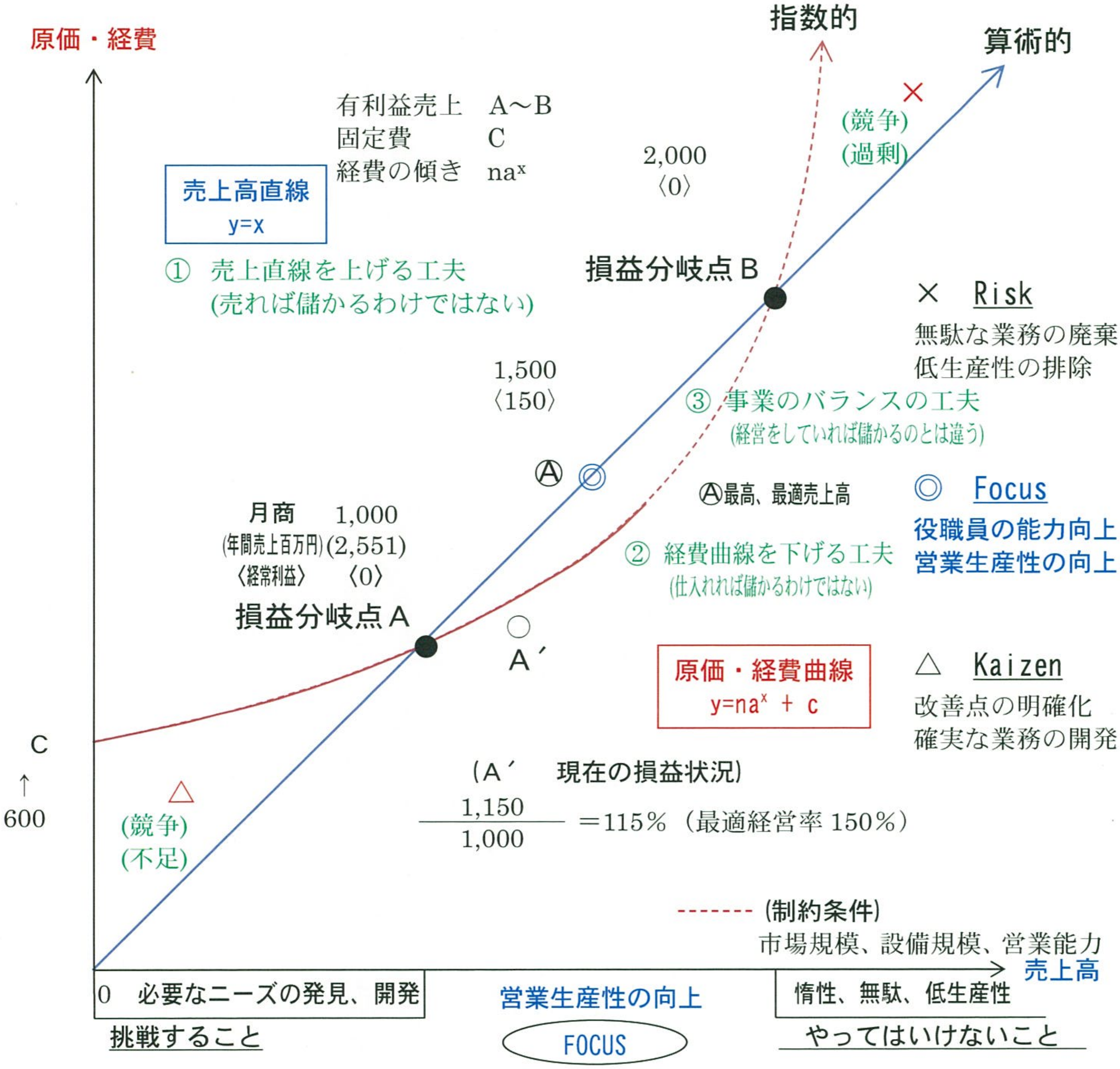
このように考えると、日頃の経営学も監査実務も楽しくなってくる。

赤字でもチャレンジする仕事、今 focus する仕事、放棄すべき仕事の区別は難しいが、その区別は存在し、仮に売上高を直線と見ても、総コスト曲線の上方の動きは、確実に**やってはいけない仕事**のあることを予想させる。

経営の現状と可能性

（変化に対応する経営の重要性）

Y (H27.11.24)
(単位：千円)



原価・経費曲線　$y=na^x+600$

原価・経費曲線は逓増し、供給曲線のように弓なりに増加すると考えられる。従って、損益分岐点は**Ａ点**と**Ｂ点**の二つとなる。
利益(効果)をあげられる点は限られており、Ⓐ**点**で最大となるが、企業はその点に向かって経営努力をし、それを維持するために絶えまない innovation **と廃棄が必要**である。

ドラッカーへの旅

（知の巨人の思想と人生をたどる）

著者　ジェフリー・A・クレイムズ　訳者　有賀裕子　2009年8月30日発行　ソフトバンク クリエイティブ株式会社発行

第14章　リーダーにとって何より重要な仕事　（256～頁を読んで）

リーダーにとって何より重要な仕事は、「嵐を察知してそれに耐えることのできる組織、いや**嵐を吹き飛ばすような組織を築かなくてはいけない**」と言う。

組織が成果をあげるだけでなく、長く繁栄を続けるためには、経営陣は迫り来る危機の一歩先を歩いていなければならない。「イノベーション、つまりたゆみない自己革新」が欠かせないとドラッカーは言う。

○「あらゆる局面で成果をあげるリーダー」であるために何より重要なのは、「**人の意見を聞こうという意欲と、そのための能力と習慣**」だという。―「その気になれば誰でもできることだ、**口を閉じてさえすればよいのだから**」

（263～264頁から引用）

○**「任務の重要性に比べて自分がいかに小さい存在か」を自覚する力**である。

（264頁から引用）

○**自分の目標よりも組織の目標を重視する姿勢。**
有能な人材を恐れず、むしろそのような人材に勇気を与える。

（272頁から引用）

18-17
220

原文

孙子曰：凡兴师十万，出征千里，百姓之费，公家之奉，日费千金，内外骚动，怠于道路，不得操事者，七十万家。相守数年，以争一日之胜，而爱爵禄百金，不知敌之情者，不仁之至也，非民之将也，非主之佐也，非胜之主也。故明君贤将，所以动而胜人，成功出于众者，先知也。先知者，不可取于鬼神，不可象于事，不可验于度，必取于人，知敌之情者也。

故用间有五：有乡间，有内间，有反间，有死间，有生间。五间俱起，莫知其道，是谓神纪，人君之宝也。乡间者，因其乡人而用之。内间者，因其官人而用之。反间者，因其敌间而用之。死间者，为诳事于外，令吾间知之，而传于敌间也。生间者，反报也。

故三军之亲，莫亲于间，赏莫厚于间，事莫密于间。非圣不能用间，非仁不能使间，非微妙不能得间之实。微哉！微哉！无所不用间也。间事未发，而先闻者，间与所告者皆死。

凡军之所欲击，城之所欲攻，人之所欲杀，必先知其守将、左右、谒者、门者、舍人之姓名，令吾间必索知之。

必索敌人之间来间我者，因而利之，导而舍之，故反间可得而用也。因是而知之，故乡间、内间可得而使也；因是而知之，故死间为诳事，可使告敌；因是而知之，故生间可使如期。五间之事，主必知之。知之必在于反间，故反间不可不厚也。

昔殷之兴也，伊挚在夏；周之兴也，吕牙在殷。故惟明君贤将，能以上智为间者，必成大功。此兵之要，三军之所恃而动也。

13

5. 明日のトップが果たすべき5つの課題

（1999.）

(1) コーポレートガバナンスの変容

15年後には企業統治が今日とは大きく変わる

企業の所有構造の根本的な変化

決して行ってはならないことは"問題を避けること"

問題を直視して改善しなければならない

(2) 情報への新しい取組み

情報が生産要素となる。→ 組織が中継器であってはならない

流通が

高速の計算機
情報処理の問題
目に見える具体的な仕事
CFO、CIOの仕事
旧来の会計

→ 情報がマネジメントを根本から変える
ABC原価計算
今はそうではないが、

→ 将来目に見えない戦略やイノベーションの世界で役立つようになる。

世界を認識する → その前に歴史を認識する

(3) 外の世界で起こることを理解しなければならない

19Cには産業ごとのそれぞれの技術が生まれ、しかし別の産業の技術が交わることはなかった。

このことから企業内研究所が設立されたものの、ほとんどが自社の業績に結びつかなくなっている。　ベル研究所、シーメンス——

外の世界の情報が入っていない

(4) 明日のCEOたるものは、いつ命令し、いつパートナーとなるかを知らねばならない

(5). CEOが真剣に取り組まなければならない課題は、知識労働者の生産性向上が少なくともに向けるようにすることを考えねばならない。

市場経済理論には、均衡を前提とするという欠陥がある。

イノベーションどころか、変化さえ扱えない。

1911年にシュンペーターが明らかにしたように、経済活動の現実は、創造的破壊による動的な不均衡である。

今日の理論では、市場で起こっていることを説明できない。

そもそも市場が予測可能なシステムではない。本質的に不安定なシステムである。何者といえども、自らの行動~~基~~準を既存の市場に置くことはできない。

大衆が手にした所有権（ポスト資本主義）は、ガバナンス（統治）として、まだ制度化されていない。

史上初めてのことが起こったわけである。

2、~~長期~~ 短期と長期とのバランスを図る　（相反するもののバランス）

(1) 変化の時代のマネジメントの要諦はバランスである。

シュムペーターにとって短期とは3年

長期とは7年　であった。

(2) 変化を観察する。

本物の変化 ― 人が行うこと

一時の変化 ― 人が言うこと

(3) eコマースの小売におけるシェアが　（例えば10%程度）

それほど大きくならなかったとしても

そのインパクトは甚大なものになる筈である。

既存の流通チャンネルを急激に変える筈である。

(4) もっとも要求される流通システムは、

販売のためのeコマース
配達のためのスポット
の組合せ

イトーヨーカ堂、セブンイレブンの全国一万店の店舗網が

eコマースの配達システムとなる

eコマースの最大の問題は配達である。

(5) ビジネス史上初めてのこととして、販売とマーケティングと配達の

三つが分離する

Money

Three overlapping market

speculative and prone
functionless money

(1) an international market in money and information
… only virtual money
London interbank market … whole world would need for a year to finance all economic transactions

(2) national markets
24% of US economic activity is exposed to trade, In Japan, it is only 8 percent

(3) local markets

市場は一つではない。実際は互いにほとんど関わりのない市場が三つ重なりあっている

(1) グローバル市場

バーチャル通貨が動いている。いかなる機能も持たない通貨である。それ故、いかなる価値ももたらさない。購買力さえない。投機資金として、0.6%/年をかせぐために右往左往している。

(2) 貿易と無縁の純国内市場

(3) 地域市場

13-26

N5
No. P.213

経済ではなく問題は社会（アジア）

かなり深刻な緊張がある、二つの世界大戦に突入した当時のヨーロッパを思い出させる。
産業革命後の都市化の混乱と社会的な緊張と同じものをアジアに感じる。
違いは、いまのアジアは、はるかにテンポが速いということである。

韓国の問題
労使間の不信は根強く残っている

中国の問題
大量の農民がいる。行きどころがない。
すでに2億人が流動人口になっていると言われている

日本の問題
100年遅れているヨーロッパである。

積 分 の定石

(変化する量をどうやって集めるか)
どうやって、たし算するか
どうやって、形を作るか
集める

会計と経営のブラッシュアップ
平成28年9月12日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。(微分と積分なるほどゼミナール S58.1 岡部恒治著 日本実業出版社刊)
(微積分のはなし 1985.3 大村平著 日科技連刊)
(イラスト図解微分・積分 2009.6 深川和久著 日東書院刊)

Ⅰ 身近な積分

究極の加算、たし算

1. 積分の歴史

社会科学
自然科学 → グラフに描く → 幾何学の問題になる

(1) 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。(どうやって全体の面積を把握するか)

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

$\frac{dy}{dx}$ →y を x で微分することを表す(ライプニッツ)

どう変化しているか 、変化率

微分→大きなものを小さくしてわかり易くする、小さく分けて分析

y´ f´ (x)→ ´をつけると微分されていることを表す(ラグランジュ)

その結果、どうなったか 、小さな変化をどのように形とするか を積み重ねるとどうなったか

積分→小さなものから大きな形を得る、小さな変化とその結果
曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
変化する様子、変化する量をどうやって集めるか

∫ →インテグラルが付くと積分することを表す(〃)

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、
建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

積分とは、

Δt_1 という時間のあいだに　$V_1 \cdot \Delta t_1$ の距離だけ移動　x_1

Δt_2　〃　$V_2 \cdot \Delta t_2$　〃　x_2

Δt_3　〃　$V_3 \cdot t_3$　〃　x_3

その結果として、次の面積分だけ移動したことになる…

$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$ の時間の面積分　$x_1 + x_2 + x_3$

瞬間瞬間に移動する距離（x_1）は、

ある瞬間の速度（V_1）に、その瞬間の幅（~~距離~~ 時間 Δt_1）を掛け合わせた値であり、

その瞬間的な移動がつぎつぎと加算されて、

ある時間内の移動距離（x）ができあがっていることになる。
（面積）

速度のグラフに囲まれた面積を計算することを、

速度（v 又は $\frac{dx}{dt}$）を時間 t で積分するという。

速度 $\xrightarrow{\text{時間で積分すると}}$ 位置

速度 $\xleftarrow[\text{時間で微分すると}]{}$ 位置

積分　グラフを描いて、面積（タテ×ヨコ）を計算する

微分　グラフを描いて、傾き（速度、接線）を計算する

導関数とは、　変化の仕方を表わす関数が、
もとの関数の導関数である。

導関数は、連続的変化に対する変化の仕方を表す。
連続量の変化を調べるときに使う

ある工場で、x秒間に生産される生産量yが、$y=x^2$、
$y=f(x)=x^2$と表わせるとき、x秒後の生産されている
速さを求めるには、hを無限小として　xから$(x+h)$までの
速さを求める

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

hをどんどん0に近くすれば、平均速度$(2x+h)$は、
いくらでも$2x$に近くなる。　これがx秒後の速さである
$y'=2x$

x秒間に生産される生産量　$y=f(x)=x^2$に対して、
y'に$2x$を対応させる関数　$y'=f'(x)=2x$は、
生産される速さを表わす新しい関数である。
$y'=f'(x)$を、もとの関数から得られた関数という意味で
「導関数」という。

導関数の値である変化率は、接線の傾きとなる

放物線　$y = f(x) = 0.2x^2$

ある惑星で物を落したとき、落ちて行く時間 x(秒)

と落下した距離 y (m) の関係である

導関数　$y' = f'(x) = 0.4x$

導関数の量的な意味は、時間が1単位(1秒)

増えれば、落下した距離(m)がいくら増えるか

という割合を表わしている。

その値が変化し、その変化の仕方を関数として表わしている。

税金の場合には、所得が1単位増えれば、所得税がいくら

増えるかという増える割合を表す。(限界値)

例 $x=2$ のときの変化率は、

$x=2$ から $x=(2+h)$ までの h の間に増加した量

(距離、所得税)

$$f(2+h)-f(2) = 0.2(2+h)^2 - 0.2\times2^2$$

$$= 0.8h + 0.2h^2$$

これを h で割った量　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0.8 + 0.2h$

直線の傾きを表す　$= 0.8$

放物線、導関数、頂点 ― 接点、接線の式

放物線 $y=f(x)=-x^2+3x+4$

導関数 $y'=f'(x)=-2x+3$

グラフの頂点 $f'(0)=-2x+3 \rightarrow x=\frac{3}{2}=1.5$ 導関数

$f(1.5)=-1.5^2+3\times1.5+4 \rightarrow y=6.25$ $\Big\rangle$ $(1.5, 6.25)$

放物線上の点、 $x=2$ における

$(2,6)$ における

$y=f(2)=-4+6+4=6$ $\Big\rangle$ $A(2,6)$

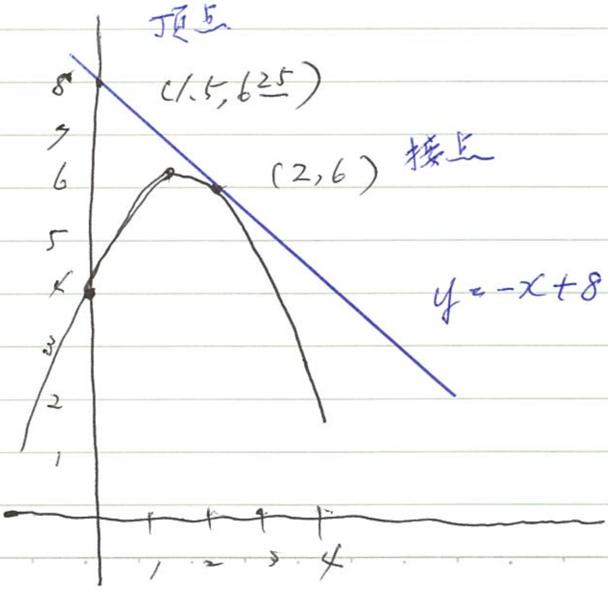
接線の傾き A(2,6)における接線の傾きは、導関数により

$y'=f'(2)=-4+3=-1$

接線の式 点 $\overset{(2,6)}{(a,b)}$ を通って、傾きがmの場合

$y-b=m(x-a)$ $y-6=-1(x-2)$

$y=-x+8$



9. $v = f(t)$

横軸にtを 縦軸にvをとり

tをある値に固定すれば vの値も決まるとする

このとき、vはtの関数であるといい

$v = f(t)$で表わす

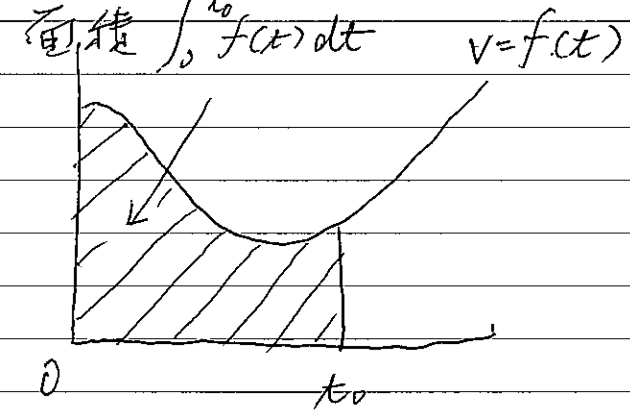
$v = t^2 + t$, $v = \sin t$ ……

tの値を決めるとvの値が決まる。

tが0からt_0の範囲で面積を求めるとすると

$\int_0^{t_0} f(t)\,dt$ タテ(高さ)×ヨコ(幅)を表す

高さv 幅dt



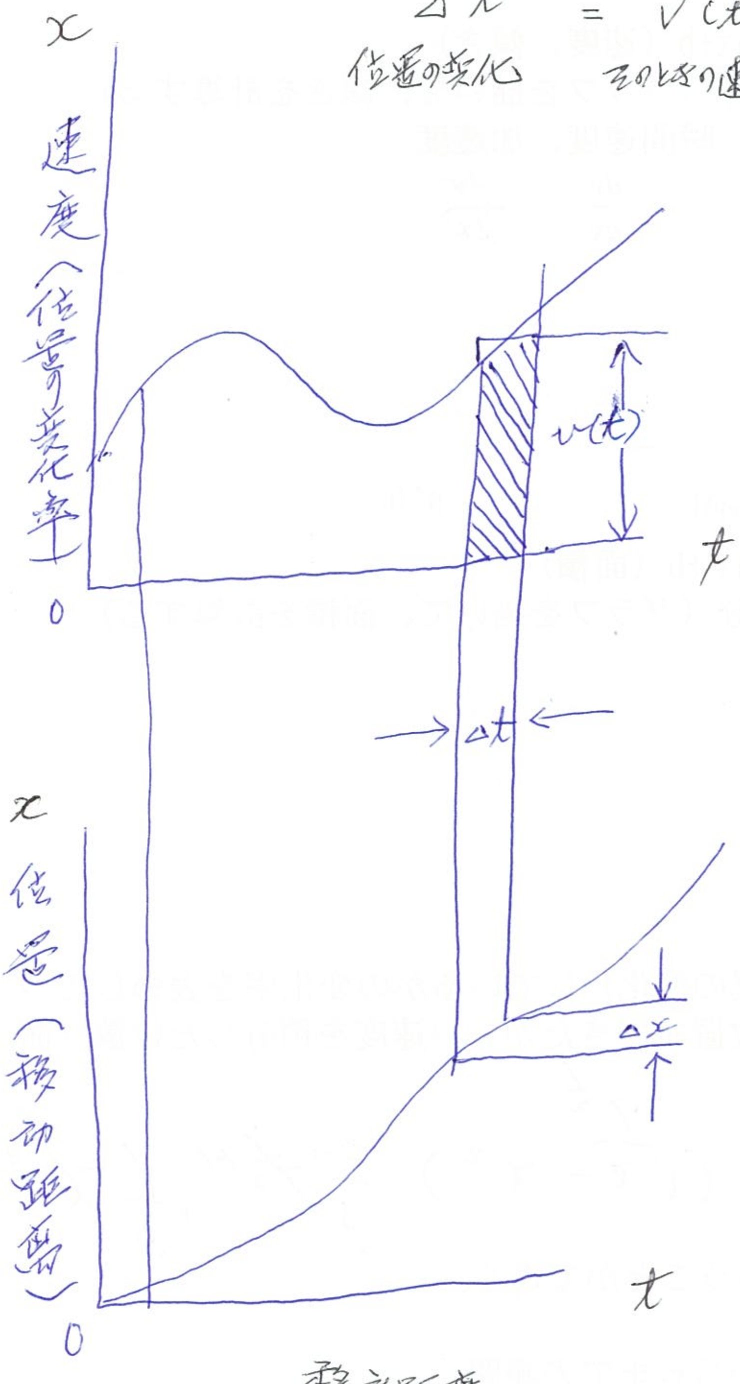
ふつうはこれを$F(t)$と書き、 $F(t) = \int_0^{t} f(t)\,dt$ とする

グラフの面積が変化の結果を表わすという意味は、

速度と距離(移動)の関係からもよく解る。

$\Delta t = V(t) \times \Delta t$

位置の変化　そのときの速度　瞬間(しゅんかん)



非常に短かい時間の幅 Δt (瞬間) として、

そのときの速度(V(t))は平均して

v(t) であるとする。

そうすると、Δt の位置の変化(移動距離)

Δx は

$\Delta x = v(t) \cdot \Delta t$ で

計算できる。

すなわち、斜線の面積が

位置の増加分(移動距離 Δx)になっていることがわかる。

(移動距離)

位置の変化 Δx は、(そのときの)平均速度 v(t) と 瞬間(時間) Δt

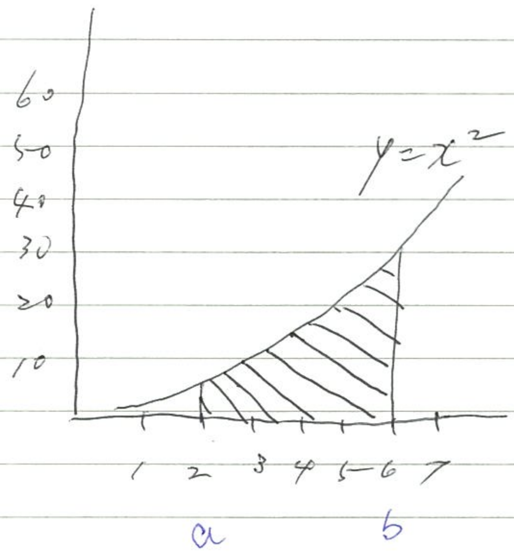
の積である

$\Delta x = v(t) \cdot \Delta t$

その面積 移動距離 $S = \int_a^b f(x)\,dt$

ある時間中の移動距離は、その時間に含まれるすべての瞬間について の移動距離を足し合わせれば求められる。

グラフ面積



$$y=f(x) = \int_2^6 f(x) = \int [x^2]_2^6 = \frac{1}{3}(x^3) - \frac{1}{3}(x^3) = \frac{1}{3}(6)^3 - \frac{1}{3}(2)^3$$

$$= 72 - 2.6667 = 69.333 \cdots$$

$y=f(x)$ は 高さ

$$\frac{6-2}{(6-2)} = \frac{b-a}{n} = \Delta x \text{ 幅}.$$

nをどんどん大きくすると Δxの値はどんどん小さくなるので Δx と書く

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x$$

y_i Δx (たし算の表現)

y dx (積分の表現)

$$S = \int_a^b y \cdot dx$$

xがaからbまでの範囲で
yをxで積分した結果 S になることを
表現する.

微分 ⇄ 積分

$$x^2 \underset{xで微分}{\overset{a\sim xの間で積分}{\rightleftarrows}} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}a^3$$

aをある任意の定数と考えれば

$$\int_a^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$ を微分すると $\longrightarrow x^2$

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$ $f(x) = x^2$ の場合 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

一般に
$f(x)$ を積分すると $F(x)$ になる

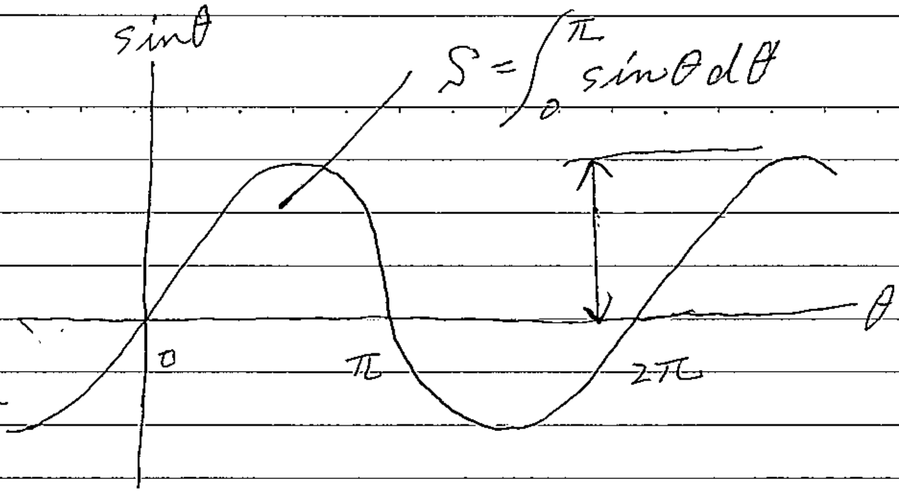
○ $f(x)$の原始関数を求めることを不定積分といい、

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

○ ある区間を指定して積分した値を計算することを定積分という

$$\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c) \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

このため定積分の答は一つの値となるのに対して、
不定積分の値は無数にある



sin 曲線の一つの山の面積Sは、

$$S=\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta$$ となる

sinθの曲線とθ軸にはさまれた面積Sは

θが 0→π間の積分である

$$\cos\theta \xrightarrow{\text{微分}} -\sin\theta$$ であるから

$$-\cos\theta \longrightarrow \sin\theta$$ であり

sinθの原始関数は $-\cos\theta + C$ (定数)である

従って求める面積は

$$S=\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=\Big[-\cos\theta+C\Big]_{\theta\text{に}\pi\text{を代入}}-\Big[-\cos\theta+C\Big]_{\theta\text{に}0\text{を代入}}$$

$$=-\cos\pi+C+\cos 0-C=-\cos\pi+\cos 0=2$$

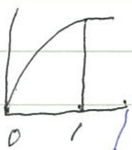
自然現象や社会現象が

$y=f(x)$ の形で表わされたとすると、

この曲線と x 軸にはさまれた面積を、

x が a から b までの区間について計算すると、

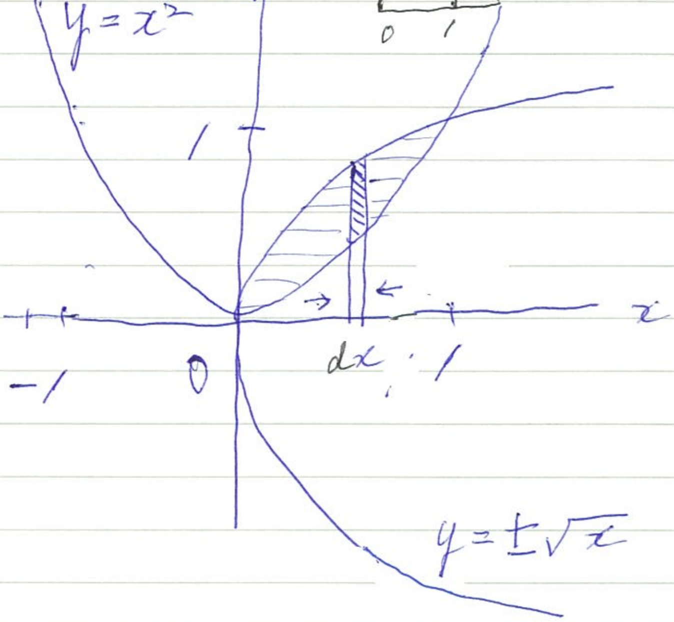
その面積 S は、 $S=\int_a^b f(x)\,dx$ で求められる。



$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ −


$\int_0^1 x^2\,dx$ =

$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$



左のグラフの場合は

横線の部分は、

$y=x^2$ と $y=\pm\sqrt{x}$

の2本の曲線に囲まれたものである

図形の縦方向の長さは

$\sqrt{x}-x^2$、 (dx は幅)

従って、細長い図形の面積を dS とすると

$$dS=(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$(1)^{\frac{3}{2}}=1$ $(1)^3=1$

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$\int\sqrt{x}=\int x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

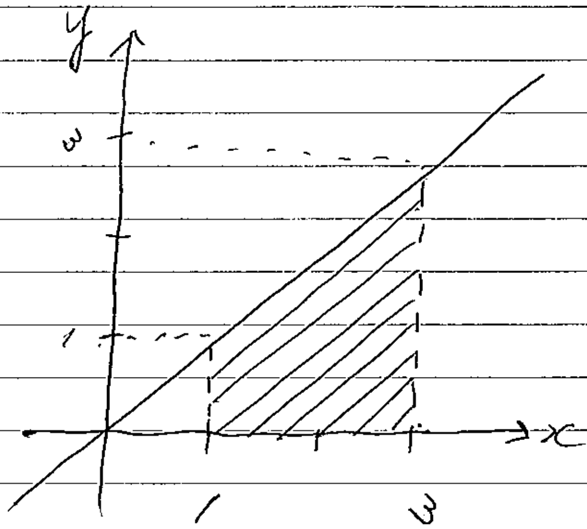
$\int x^2=\frac{1}{2+1}x^{2+1}=\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}$

No.

定積分で面積を求める（グラフに囲まれた面積を求める）

$y=x$ の定積分

1から3の範囲で定積分する

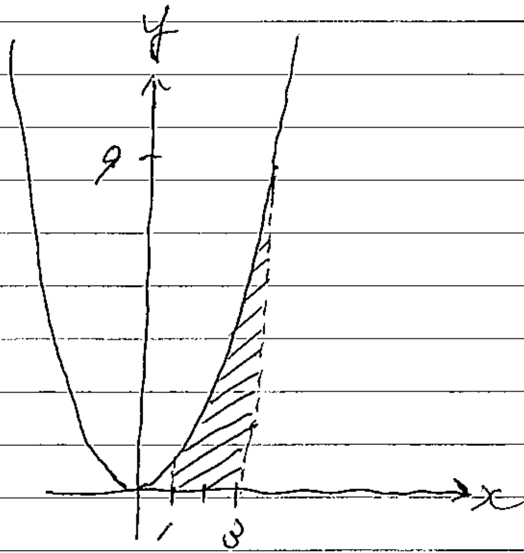


$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$y=x^2$ の定積分

1から3の範囲で定積分する



$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

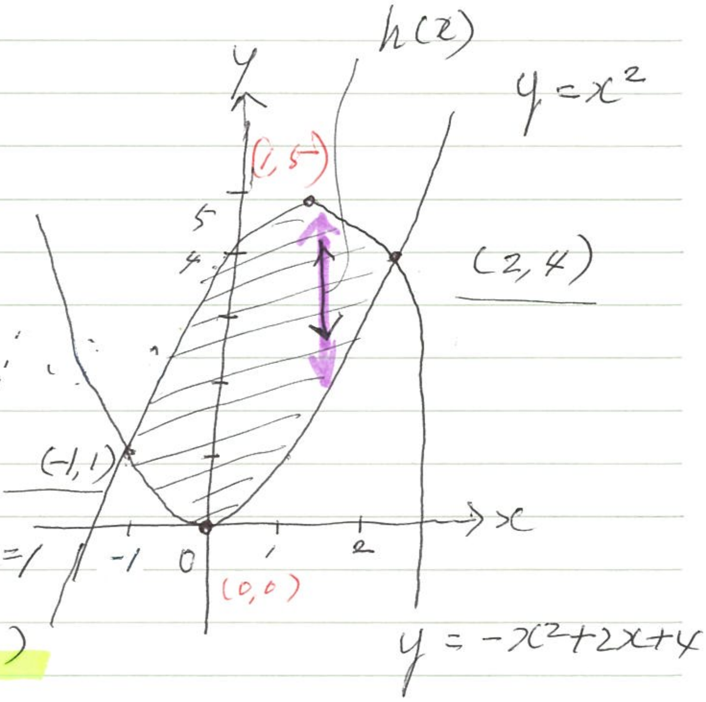
$$= \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

PLUS

2曲線で囲まれた面積の求め方

$f(x) = x^2$

$g(x) = -x^2 + 2x + 4$



(1) グラフとグラフの頂点

$f(x)=x^2$ より $f'(x)=2x$

$f'(0)=0$　$f(0)=0$　頂点$(0,0)$

$g'(x)=-2x+2$　$g'(0)=-2x+2$, $x=1$

$g(1)=-1^2+2\cdot1+4=5$　頂点$(1,5)$

(2) 交点を求める

$f(x)=g(x)$の二次方程式を解くと

$x^2=-x^2+2x+4 \longrightarrow -2(x^2-x-2)=0$

$\longrightarrow (x+1)(x-2)=0$ よって $x=-1, 2$ で交わる

$x=-1$　$y=x^2=1$ 故に $(-1,1)$，$x=2$　$y=2^2=4$ 故に $(2,4)$ で交わる

(3) y方向の長さを求める

y方向の長さを$h(x)$とすると、グラフより、

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x) \leqq g(x)$ なので

$h(x)=g(x)-f(x)=-x^2+2x+4-x^2 = -2x^2+2x+4$

(高さ，横はdx)

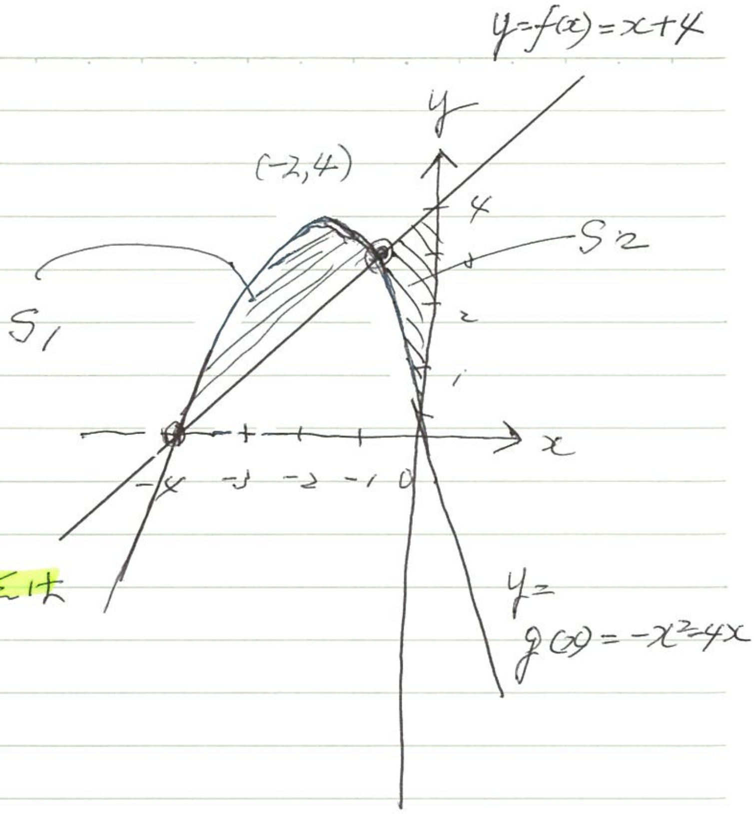
(4) 定積分　xの範囲とy方向の長さの関数により

$$\int_{-1}^{2} h(x)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)$$

$= 9$

交差する関数に囲まれた面積

$f(x)=x+4$
$g(x)=-x^2-4x$



(1) グラフを描く、頂点を求める

$f(x)=x+4$
$g'(x)=-2x-4 \to x=-2$
$x=-2$のとき $g'(-2)=0$で、
$g(-2)=4$ なので $g(x)$の頂点は
$(-2,4)$

(2) 交点を求める

$f(x)=g(x)$の 2次方程式を解くと

$x+4=-x^2-4x \to x^2+5x+4=0 \longrightarrow (x+1)(x+4)=0$

よって $x=-4,-1$ で、交点は、 $x=-4 \to y=-4+4=0$ $(-4,0)$
$x=-1 \to y=-1+4=3$ $(-1,3)$

(3) y方向の長さを求める

グラフより S_1の $-4 \leqq x \leqq -1$ で、$f(x) \leqq g(x)$
S_2の $-1 \leqq x \leqq 0$ で、$f(x) \geqq g(x)$

(4) 定積分

$S_1=\int_{-4}^{-1}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)dx=-\int_{-4}^{-1}(x+1)(x+4)dx$?

$=\frac{1}{6}(-1+4)^3=\frac{9}{2}$

$S_2=\int_{-1}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{0}(x^2+5x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}(x^2)+4x\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=\frac{11}{}$

ア）

x軸

S_1の範囲、(ヨコ)は $-4 \leqq x \leqq -1$ で、

y軸(タテ)は、$f(x) \leqq g(x)$ なので、$g(x)-f(x)$

となる。よって、

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx \ \text{~~となる~~} = \int_{-4}^{-1} (-x^2-5x-4)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{-4} (x+1)(x+4)\,dx = \frac{1}{6}(-1+4)^3 = \frac{9}{2}$$

?

イ）

S_2の範囲、y軸と $f(x)$、$g(x)$ に

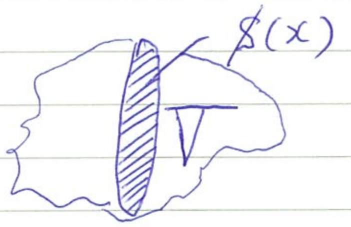
囲まれたS_2は、~~である~~

$-1 \leqq x \leqq 0$、$f(x) \geqq g(x)$ であり、

$$S_2 = \int_{-1}^{0} \{f(x) - g(x)\}\,dx \ \text{~~となる~~} = \int_{-1}^{0} (x^2+5x+4)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{11}{6}$$

2. 長さ10で、長さの方向に垂直な断面積 $S(x)$ が次のようになる物体の体積 V を求める



$$S(x) = 3x^2$$

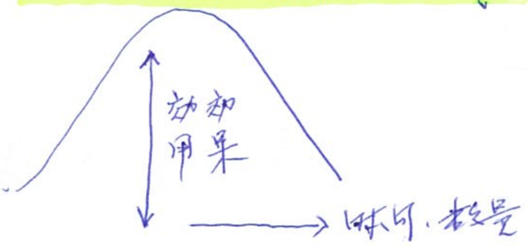
0から10までの断面積を積分する

$$V = \int_0^{10} S(x)\,dx = \int_0^{10} 3x^2\,dx = \left[\frac{3}{3}x^3\right]_0^{10}$$

$$= \left[x^3\right]_0^{10} = 10^3 - 0 = 1{,}000$$

かけ算できるものは、すべて積分できる。

サービス（一定期間）とは



⑸ インテグラル（integral）

y=f (x) を x で積分するときに、

∫ f (x) dx と書く（後に来る微分したものをたし算する）

∫ インテグラル　S 字型をしているのは合計（SUM、integral）を表わす

f(x) というタテの長さと限りなく小さなヨコのかけ算

つまり、f (x) dx と限りなく小さなもの（タテ×ヨコ）をかけ算したものを、

∫ その x を分割した数だけ足し合わせる記号である。

∫ は後に来る小さなもの（微分）をたし算すること。

x と y の関係

y は、かけ算をして全体量が求められるものになる

y＝面　積＝縦×横
y＝体　積＝断面積×高さ
y＝距　離＝速度×時間
y＝売上高＝単価×数量
y＝利　息＝元金×利率
y＝仕入高＝単価×数量
y＝サービス＝○×時間、数量

効用

どちらかというと 効かない性質

どちらかというと 効く量

効用×時間？

サービスは 2つのものから成りたっている

○は質のようなもの、火力（火かげん）、知識……
（サービスの質）

仕事と似ている……面積で表わす

タテの長さ（効用、効果）
ヨコの長さ（時間、数量）

$\int_1^2$ インテグラル

∫ (2) − ∫ (1) と書くのはめんどうなので、インテグラルの上と下に 2 と 1 が付いているのは、1∫ (x) を求めて、2 を代入したものから 1 を代入したものを引くということにする。

時間のつみ重ね!!

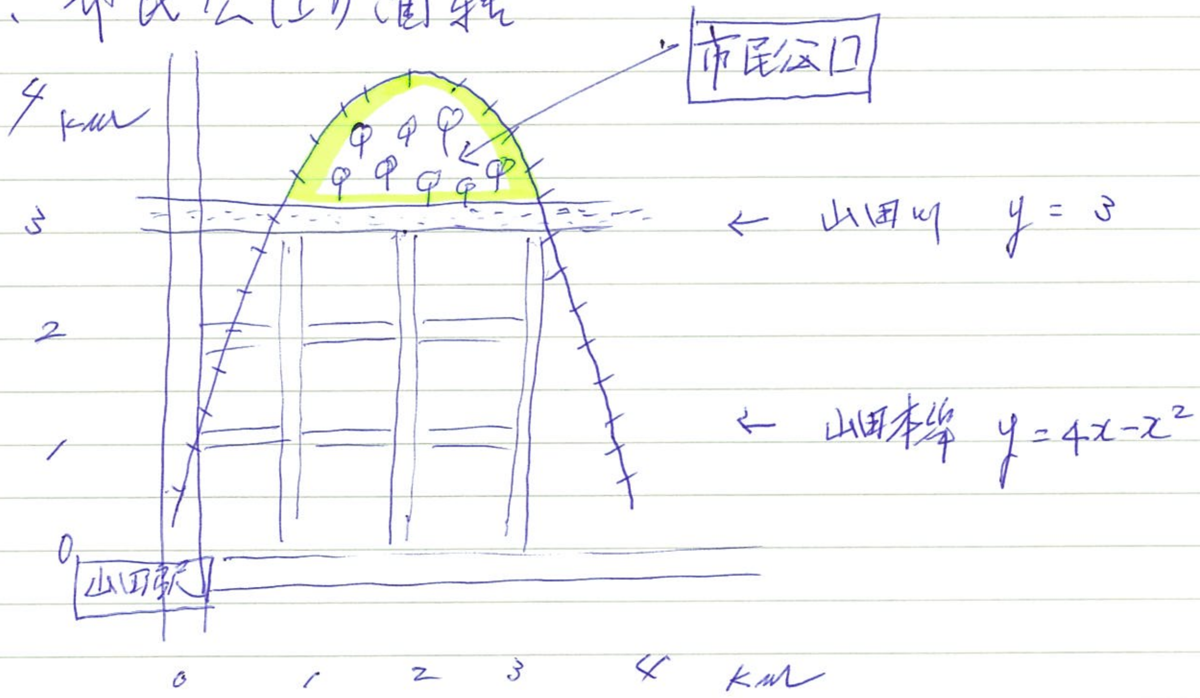
桜はいつ開花するか

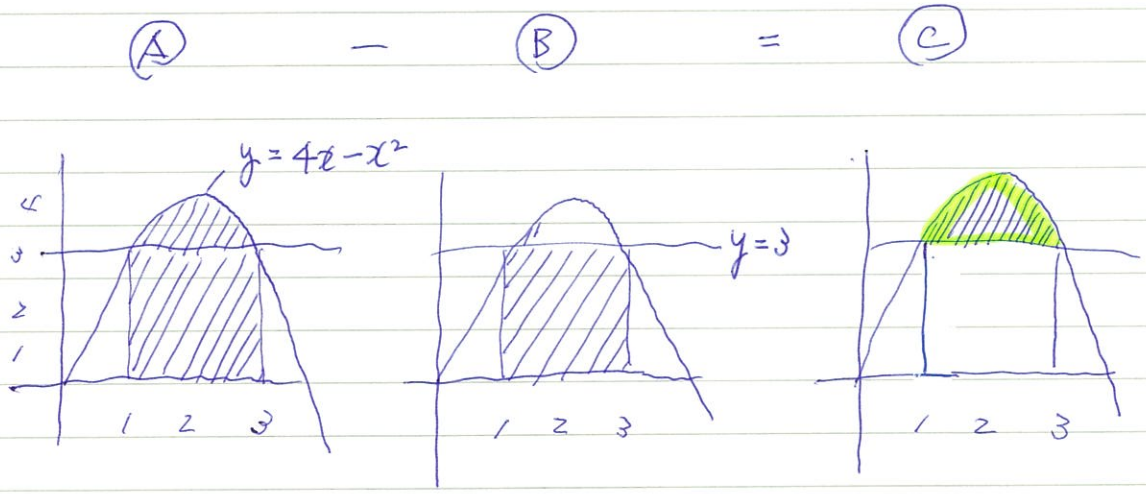
桜の花のもとである花芽は前年の夏にできてから眠りにつき、それて、冬から春先の気温とともに成長を続ける。 ― 積分

基準値の温度を足していった"積算温度"が一定の値を超えると桜は開花する

↓花になる

5. 市民公園の面積





$$\int_1^3 (4x-x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$= \frac{22}{3}$$

$$\int_1^3 3\,dx = \left[3x\right]_1^3$$

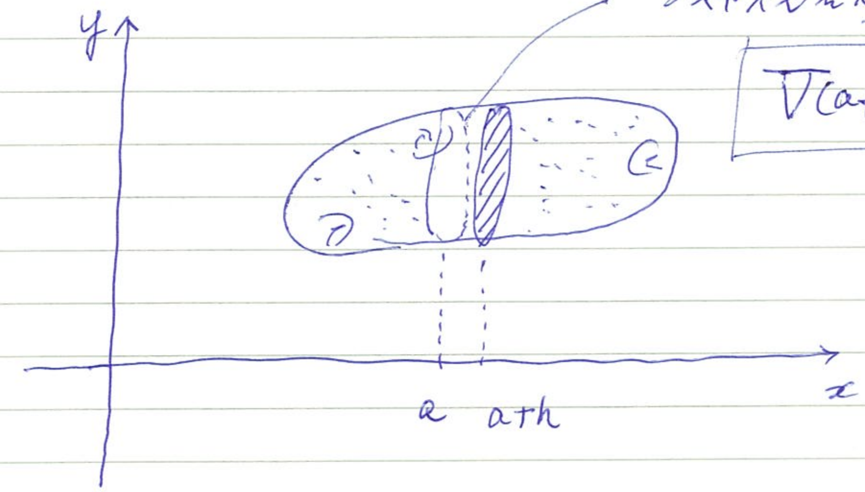
$$= (3\times3)-(3\times1)$$

$$= 6$$

2つに分けて計算した後、計算する。

$$\frac{22}{3} - 6 = \frac{4}{3}\ (km^2)$$

6、ジャガイモの体積



（ポテトチップ）
ジャガイモをスライスした部分の体積

$$\boxed{V(a+h)-V(a) \fallingdotseq h \times S(a)}$$

$S(a)$ = ジャガイモの断面積

ポテトチップの厚み

hを十分小さくすれば、その体積Vはほぼ$h \times S(a)$となる。

$V(a+h) - V(a) = h \times S(a)$ となり、

hで両辺を割り、hを限りなく0に近づけると

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(a+h) - V(a)}{h} \fallingdotseq \frac{h \times S(a)}{h} = S(a)$$

↑ ((ジャガイモの体積を微分するとジャガイモのスライス（ポテトチップ）の面積になる。))

((逆に、立体の断面積を積分すれば、その立体の体積が求められる。))

$$V(x) = \int_b^a S(x)\,dx$$

2. 地球の体積

ギリシャの天文学者 エラトステネス (B.C. 278〜B.C. 192)

シエネの正午の井戸に反射した太陽
(太陽の影の角度 0°)
同時刻にアレクサンドリアで映った太陽
(太陽の影の角度 ○°)

800キロの距離
7度12分の差

地球の円周の長さを x とすると

$$\frac{7°12'}{360°} = \frac{800\,km}{x}$$

$x ≒ 40,500\,km$　地球の円周

円周 ÷ 2π ≒ $6,370\,km$　地球の半径　$2\pi r = 40,500$　$r ≒ 6,370$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1.08 \times 10^{12}\,km^3$　地球の体積

重さから面積を出す

たとえば、図形の重さが80グラムで、
敷きつめられた 1cm²角のタイルの重さが 2グラムとすると、
80g / 2g = 40倍、(タイルをはめて行く)
だから面積も、1cm² × 40 = 40cm²

大きなものを量るために

土地、波、象

小さなものから大きなものを得る。
とことーん長方形を小さくして行き、
どんなに難しい形でも、小さなものをあてはめて
それを合計して大きなものを量る。

中国の曹操の子が、小石を集めて
象の重さを量ったように!!