第13回　企業組織再編

(合併ー50%超)

会計と経営のブラッシュアップ
平成28年3月28日
山内公認会計士事務所

本レジュメは、企業会計基準及び次の各書を参考にさせていただいて作成した。(企業組織再編の会計と税務 山田淳一郎監修 H22.10 税務経理協会刊)
(企業買収・グループ内再編の税務　佐藤信祐外著　2010.11 中央経済社刊)(事業再生の法務と税務　太田達也著　H25.6　税務研究会刊)
(組織再編の法律、会計税務　山田 BC　H27.2 法令刊)

Ⅰ. 事業再生の諸手法、譲渡(分離)側と取得側からの検討

区　分	内　容	メリットとデメリット
(1)事業譲渡	① 営業(財産)の一部又は全部の譲渡	① 設計がしやすい
	② 契約による取引行為	② 簿外債務リスクが少ない
	③ 個々の財産の譲渡	③ 許認可の引継ぎの困難
	④ 株式の譲渡の方法	④ 事業譲渡価額の決定
	⑤ 営業権の計上(要説明資料)	⑤ 消費税の課税
	⑥ 充分な再建計画の必要性	⑥ 資産譲渡益の処理
(2)合　併	① 適格合併	
	② 非適格合併	
	③ 無対価合併	
(3)分　割	① 個別の取引でなく、包括的な資産負債の移転(包括承継)	① 個別の同意は不要
		② 許認可手続の容易化
	② 第2会社方式の活用	③ 重畳的債務引受を行う方法
	③ 適格、不適格の区分	④ 簿外債務の承継リスク
	④ 営業権(資産調整勘定等)	⑤ 消費税、不動産取得税、登録免許税
	⑤ 対価の柔軟化	
	⑥ 移転資産の範囲	⑥ 資産譲渡益の処理
	⑦ 充分な再建計画の必要性	
(4)その他の方法	① 債権放棄	
	② 増減資	
	③ DES	
	④ DDS	
	⑤ 株式交換、株式移転	
	⑥ 株式の譲渡	
	⑦ 個人不動産の譲渡	

本レジュメはブラッシュアップ日次にホームページにupしてあります

1．適格合併（税務処理）

(1) 被合併法人から合併法人への資産等の移転は簿価による。
(2) 被合併法人において、譲渡損益は発生しない。
(3) 被合併法人の利益積立金は、合併法人に引き継がれる。
(4) 被合併法人の旧株の譲渡損益は発生せず、みなし配当も生じない。
(5) 平成22年度税制改正
　① 合併法人において増加する資本金等の額の計算方法
　② 合併法人において増加する利益積立金額の計算方法
(6) 支配関係等の定義(H22改正)
　① 完全支配関係
　　「一の者」が法人の発行済株式等の全部を直接若しくは間接に保有する関係。100％兄弟会社間、100％グループ内の三角合併を含む。
　② 支配関係
　　50％超の関係
(7) 無対価合併は原則として非適格合併となるが、企業グループ内の合併で、単に対価の交付を省略しただけと考えられる場合は適格合併として扱われる。
(8) 増加する資本金等の額
適格合併により、合併法人において増加する資本金等の額は、被合併法人の合併の日の前日の属する事業年度終了時の資本金等の額から、合併による増加資本金額等及び抱合株式の帳簿価額の合計を減算した額となる。
(9) 利益積立金額
純資産の額－増加した資本金等－抱合株式の帳簿価額
(10) 抱合株式
　① 合併法人が合併前から保有している被合併法人の株式をいう。
　② 抱合株式については、合併交付株式等の割当てを行わない場合にも、税法上は新株割当が行われたものと合併法人においてみなし配当の計算を行う。
　③ 適格合併の場合は、抱合株式の帳簿価額を資本金等の額から減算する。
　④ 譲渡損益の計算は行わない。

3

第1編

〈適格合併判別フローチャート〉

(1) 合併に際して交付するのは合併法人株式または合併親法人株式いずれか一方の株式だけである。すなわち，現金等の株式以外の財産の交付は行われない。
- No → 非適格合併
- Yes → (2)

(2) 被合併法人と合併法人との持分関係が（合併の前後ともに）100%になっているか。(注)
- Yes → 適格合併
- No → (3)

(3) 被合併法人と合併法人との持分関係が（合併の前後ともに）50%超になっているか。
- Yes → (4)
- No → (5)

(4) 次の2つの条件を満たしているか。
①被合併法人の合併直前の従業者のうち，おおむね80%以上に相当する数の者が合併後に合併法人の業務に従事することが見込まれていること
②被合併法人の合併前に営む主要な事業が合併法人において合併後に引き続き営まれることが見込まれていること
- Yes → 適格合併
- No → (5)

(5) 被合併法人と合併法人とが共同で事業を営むための合併で，次の①～⑤（被合併法人の株主が50人以上である場合には①～④）の要件をすべて満たしているか。
①被合併法人の合併前に営む主要な事業と合併法人の合併前に営むいずれかの事業とが相互に関連するものであること
②被合併法人の合併前に営む主要な事業とそれに関連する合併法人の合併前に営むいずれかの事業のそれぞれの売上金額，従業者数，それぞれの法人の資本の金額若しくはこれらに準ずるものの規模の割合がおおむね5倍を超えないこと，又は合併前の被合併法人の特定役員（前頁参照）のいずれかと合併法人の特定役員のいずれかとが合併後合併法人の特定役員となることが見込まれていること
③被合併法人の合併の直前の従業者のうち，その総数のおおむね80%以上に相当する数の者が合併後に合併法人の業務に従事することが見込まれていること
④被合併法人の主要な事業で合併法人の事業と関連するものが合併法人において合併後に引き続き営まれることが見込まれていること
⑤合併の直前の被合併法人の株主で合併により交付を受ける合併法人の株式または合併親法人株式のいずれか一方の株式（議決権のないものを除く）の全部を継続して保有することが見込まれる者が有する被合併法人の株式（議決権のないものを除く）の数を合計した数が被合併法人の発行済株式（議決権のないものその他一定のものを除く）の80%以上であること
- Yes → 適格合併
- No → 非適格合併

非適格合併

適格合併

(注)　従業員持株会及びストックオプションにより取得した株式が5%未満である場合は，持分算定上これらの株式を分母から除きます。また，上記の持分関係には親子関係の他，合併当事会社が兄弟関係で，かつ，合併後に株式の継続保有が見込まれるものが含まれます。

2．適格合併と事業譲渡

2016.01.21

1. 適格合併（株式交付）の税務処理

A 社(合併側)

資産	185	負債	80
B 社株	15	資本	120

B 社(被合併)

資産	100	負債	70
(含み益	10)	利益積立金	10
		資本金等	20

A 社(合併後)

資産	270	負債	150
		資本	150
		自社株	△30

※被合併法人の資産には含み益 10 がある。
※合併法人に株式を割当交付
※B 社株は抱合株式となる

(1) B 社の資産等移転時の仕訳

(借)	負　債	70	(借)	資　産	100
	利益積立金	10			
	新株式	20			

(2) B 社の資産等移転後の B／S

新株式	20	資本金等	20

(3) 次に B 社が移転資産等の対価として取得した A 社の株式は、直ちに B 社の株 B 主に交付したものとして取り扱われる。

(4) B 社から株主への株式交付時の仕訳

(借)	資本金等	20	(借)	新株式	20

(5) A 社が B 社から資産等を受入れたときの A 社の税務処理

(借)	資　産	100	(借)	負　債	70
				資本金等	20　※
				利益積立金	10

※資本金、資本準備金の割り振りは合併契約書で決める。
※無対価の場合は合併差益(資本準備金)となる。

(6) 抱合株式の処理

(借)	資本金等	15	(借)	B 社株式	15

(被合併欠損)

資 産	170	負債	80	資産	50	負債	70	資産	220	負債	150
B社株	30	資本	120			資本	△20			資本	100
										自社株	△30

2. 無対価合併（**無対価合併**）

資 産	170	負債	80	資産	100	負債	70	資産	270	負債	150
B社株	30	資本	120			資本	30			資本	120

※B 社株の表現は？

資 産	170	負 債	80	資産	50	負債	70	資産	270	負債	150
B社株	30	資 本	120			資本	△20			資本	120
										未処理欠損	△20
										合併差損	△30

※B 社株の表現？

3. 事業譲渡

A 社(譲受側)

資産	200	負債	80
		資本	120

B 社(譲渡側)

資産	100	負債	70
		資本	30

A 社(譲受後)

資産	300	負債	150
		未払金	30
		資本	120

↓

未収金	30	資本	30

4. A 社の B 社株

↑

A 社

資産	170	負債	80
B 社株	30	資本	120

譲受財産

資産	100	負債	70

A 社(譲受後)

資産	270	負債	150
B 社株	30	未払金	30
		資本	120

※B 社株は、譲渡又は償却できるか

5. B 社欠損の場合

A 社

資産	170	負債	80
B 社株	30	資本	120

B 社

資産	100	負債	120
		資本	△20

A 社

資産	270	負債	200
B 社株	30	資本	120
営業権	20		

↓

B 社

資産	0	負債	0
		資本	△20

(適格) 吸収合併の手続

2016.01.18

1. 合併契約の締結（会 748、749）

(1) 存続会社および消滅会社の商号および住所

(2) 消滅会社の株主等に交付する対価に関する事項

(3) 吸収合併の効力発生日

2. 合併契約に関する書面等の事前開示（会 782、794 施規 182, 191）

以下のいずれか最も早い日から、効力発生後6ヶ月を経過する日まで

(1) 株主総会の2週間前の日

(2) 株主に対する通知、公告のいずれか早い日

(3) 債権者に対する通知、公告のいずれか早い日

3. 株主総会決議による合併契約の承認（会 783、795）

(1) 効力発生の前日までに行う

(2) 特別決議による

(3) 簡易合併等では、株主総会決議は不要となる

4. 株券提出の手続（会 219）

消滅会社が株式を発行している場合
(通知、公告が必要)

5. 株式買取請求のための株主に対する通知・公告（会 785、797）

6. 債権者に対する催告および公告（会 789、799）

存続会社および消滅会社は、一か月以上の期間を定めて、官報による公告および知れたる債権者に対する個別催告を行わなければならない。

7. 合併に関する書類の備え置き（会 801）

効力発生日から６ヶ月間

8. 合併登記（会 921）

(1) 存続会社　　変更の登記

(2) 消滅会社　　解散の登記

吸収合併スケジュール（例）

2016.01.19

	2/5				2/10		3/5	3/10	4/1		
（存続会社）	取締役会	合併契約締結	事前開示書類の備え置き	株主総会収集通知発送	債権者に対する公告・催告		株主に対する通知等	株主総会	合併期日	事後開示書類の備え置き	合併による変更登記
（消滅会社）	取締役会	合併契約締結	事前開示書類の備え置き	株主総会収集通知発送	債権者に対する公告・催告	株券提出公告・通知	株主に対する通知等	株主総会	合併期日		解散登記

9/16'15

Q46：対価の柔軟化

A46：合併、分割等において株式の代わりに金銭のみの交付が出来るようになりました。

（但し、非適格となる）

現行商法では合併、分割、株式交換、株式移転に際して、消滅会社の株主、分割会社の株主、完全子会社の株主に交付される財産は存続会社、分割承継会社、完全親会社の株式に限定されています。

しかし、昨今企業再編の必要が高まり、国内に留まらず、外国企業との企業再編も取り沙汰されていますが、企業再編の対価が株式に限定されていることから、株式以外の金銭その他の財産も対価として交付することを認めるよう要望がありました。

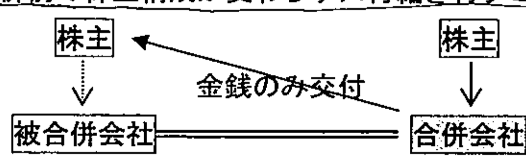
新会社法では吸収合併、吸収分割、又は株主交換の場合に消滅会社等の株主に対して存続会社等の株式を交付せずに、金銭その他の財産の交付することができるようになりました。

これに従い、株式に代えて交付される財産の評価によって、消滅会社の株主や債権者に影響を与えることになりますので、その算定方法などを知らしめるために「消滅会社の株主に対する株式の割当てに関する事項についてその理由を記載した書面」「対価の内容を相当とする理由を記載した書面」の開示が定められました。

この対価の柔軟化により、次のような組織再編が可能となってきます。

○ 金銭のみによる合併（キャッシュ・アウト・マージャー）

消滅会社の株主に対して、金銭のみを交付する合併をいいます。この場合には存続会社は合併によっても合併前の株主構成が変わらずに再編を行うことが可能です。



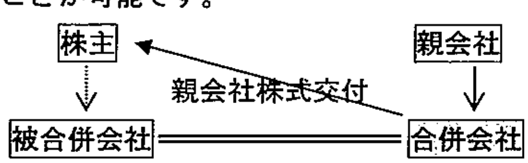
（被合併会社の株主は被合併会社の株式を合併会社に渡し、金銭を見返りにもらう）

株主譲渡、売買と同じ課税

○ 親会社株式による合併

消滅会社の株主に親会社の株式を交付する合併（三角合併）が可能となります。

この方法で外国企業が日本に子会社を設立し、その子会社が他の日本企業を吸収合併する際、親会社である外国企業の株式を交付することにより、金銭を用いずに外国企業が国内企業を合併することが可能です。



（被合併会社の株主は被合併会社の株式を合併会社に渡し、合併会社の親会社の株式を見返りにもらう）

50%超合併（適格合併）

被合併法人	合併法人

(1) 合併により増加する資本金 ——→ 資本金 15

(2) 被合併法人の発行済株式数 1株

被合併法人の合併直前のB/S

資産 80（含み益 20）	負債 50
	資本金 10
	資本積立金 10
	利益積立金 10

資産、負債の簿価引継（法62条の2）

適格合併のため含み益は実現しない

利益積立金の引継（旧法令9条①二）

(3) 資産等移転時の仕訳

借方		貸方	
負債	50	資産	80
利益積立金	10		
新株式	20		

合併法人の受入仕訳

借方		貸方	
資産	80	負債	50
		利益積立金	10
		資本金	15
		資本金等	5

(4) 被合併法人は、移転資産等の対価として、
いったん合併法人の株式を、被合併法人
の利益積立金控除後の純資産相当額
20（資産80－負債50－利益積立金10）
により取得したものとされる。（旧法62条の2の③）

増加資本金 15、資本金等 5
両者を合せて
資本等の金額が 20 増加
（旧令8条①五）

この金額は、被合併法人の資本等の金額20
と一致することになる。

(5) 被合併法人の資産等移転後のB/S

新株式 20	資本金等 20

(6) 次に、合併の対価として取得した
合併法人の株式は、直ちに被合併
法人の株主に交付したものとして
取り扱われる。

------ 被合併法人の株主においては、
合併法人の株式のみが交付されるため、従来所有していた旧株の
譲渡対価は、旧株の帳簿価額
となり、譲渡損益の発生はないものと
される
(法61の2①、②)
(措法37の10③)

(7) 次の仕訳により、合併法人株式20を
株主に交付することにより、被合併法人
の資本金等20を減少させる。

税務上は、このような経過で被合併
法人が消滅する

(8) 被合併法人から、新株主への
株式交付時の仕訳

資本金等 20　新株式 20

株主にみなし配当課税も生じない
(法24①一・かっこ書き)
(所25①一 かっこ書き)

(9) このような理解であるが、
H22税制改正に伴ない
上記のような取扱いは無くなった。
(旧法62条②二)
(旧法令8条①五、9条①二)

Ⅲ. 繰越欠損金の利用制限

1. 適格合併

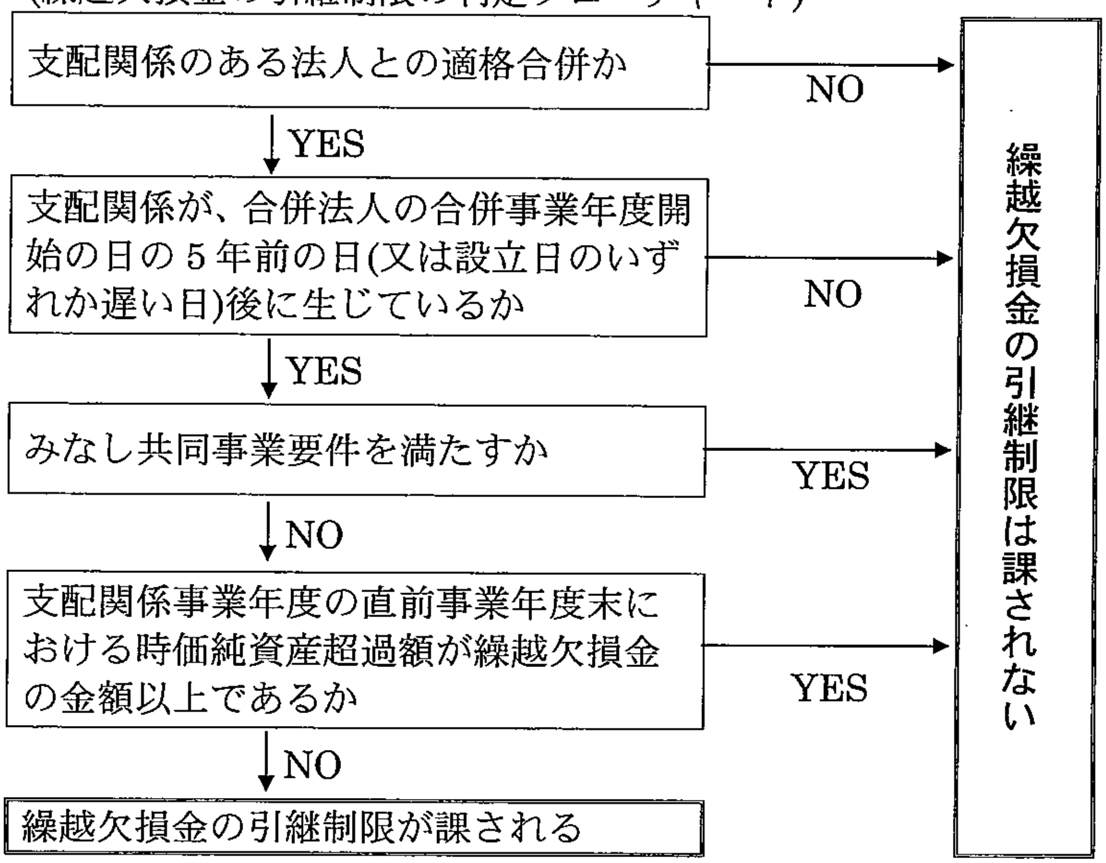
合併法人は、被合併法人の繰越欠損金を引き継ぐことができる。

2. 租税回避行為の禁止

多額の繰越欠損金を法人買収などにより不当に利用すること。

3. 5年以内のしばり

(繰越欠損金の引継制限の判定フローチャート)



13

N（29～30）北京外大レジュメ
（イノベーション）

2016.03.28

32. 敬遠のフォアボールはいかなる場合も使うべきではない“イノベーション”

イノベーションとは逃げないこと、立向うこと!!

試合は３対４の一点差で、最終回９回裏の程久保高校の攻撃を迎えた。
４番の星出純は、三塁手が深めに守っているのが目に入った。どうやら全打席出塁している四番の純を警戒しているようだ。そこで純は、初球を三塁線にセフティバントした。それは、これまでノーバント作戦を貫いてきた程高が初めて見せたバントだった。それは見事に相手の裏をかき、処理を誤った三塁手は、一塁へ悪送球してしまい、おかげで純は二塁へと進んだ。

ここで迎えたバッターは、前打席ホームランの次郎だった。敬遠だった。ここは次郎を歩かせて、次の６番バッターの桜井祐之助と勝負する作戦だった。祐之助は、おもむろに立ちあがると、ゆっくりとした足取りでバッターボックスへと向かった。よりによって、ここで祐之助に回ってくるとは、とみなみは思った。その時、加地が正義を呼び寄せて指示をした。それで、みなみは驚いて加地に尋ねた。「監督、代えるんですか？」加地は、みなみをジロリとにらむと、「安心しろ。祐之助は代えない。監督をクビにすると言われたって代えないよ」交代のアナウンスが場内に告げられた。

交代は一塁ランナーの次郎に代わって、ピンチランナーの朽木文明の起用だった。みなみは、思わず目を見開いて加地を見た。ニヤリと笑うと加地は言った。「見ていろ。敬遠したことを、心の底から後悔させてやるから。敬遠のフォアボールは、いかなる場合も使うべきでないという**イノベーション**を、おれは、今ここで起こすんだ」文明がリードを始めた。それに伴って、スタンドに陣取った程高の大応援団も、「イーチ！ニーイ！サーン！」と唱和をはじめた。

祐之助は、夕紀から聞かされた話をバッターボックスに入る直前に不意に思い出した。そうして、初球はわざと、大振りで空振りをした。そうして、２球目を胸元まで引きつけて、右方向に狙いをすまして打った。打球は、二塁手の頭上を越え、右中間を真っ二つに破っていった。その打球が外野を転々とする間に、二塁ランナーの純に続き、一塁ランナーの文明までもが生還した。

(マネジメント・エッセンシャル版　145～148頁)

人にやさしい組織と弱い組織の違いはどこにあるか。誤りには良い誤りと悪い誤りがある。

○ **組織の良否は、**そこに成果中心の精神があるか否かによって決まる。
　① **組織の焦点は、**成果に合わさなければならない。
　② **組織の焦点は、**問題ではなく機会に合わさなければならない。
　③ 配置、昇進、解雇など人事に関わる意思決定は、真の管理手段となる。
　④ 人事に関わる決定は、真摯さこそ唯一絶対の条件である。

○ 成果を中心に考える。成果とは百発百中のことではない。成果とは打率である。人は優れているほど多くのまちがいをおかす。優れている者ほど新しいことを試みる。

○ 機会に集中する。問題ではなく機会に目を向ける。問題中心の組織は守りの組織である。昨日を黄金時代と考える組織である。

組織というものは、強味を生かせば弱味が消えると思う。但し、弱味をそのままにするのは問題である。

イノベーションは、単なる改善ではない。
イノベーションの意味を明確にし、体現する必要がある。

○ あらゆるマネジメントが、**イノベーションの必要**を強調する。しかし、イノベーションをそれ自体独立した一つの重大な課題として取り組んでいるものは、組織の大小を問わず余りない。

○ 既存事業の戦略では、現在の製品、サービス、市場、流通チャンネル、技術、工程は継続するものと仮定する。これに対し、**イノベーションの戦略は、既存のものはすべて陳腐化すると仮定する。**従って、既存事業についての戦略の指針が、より多くのものであるとすれば、イノベーションについての戦略の指針は、より新しくより違ったものでなければならない。

○市場調査、製品企画、人間関係論、トレンド分析……
昨日の先端的なイノベーションだったものが、今日ではごく当り前のものになっている

○変化 ― 進歩
新しい技術が、経営管理者に対して、生産の原理を理解し、それを一貫して適用すべきことを要求している。
また、事業を統合されたプロセスとして理解し、マネジメントすべきことを要求している。

○とくに新しい技術は、マネジメントが市場を創造すべきことを要求する。
もはや、あらかじめ存在する市場に満足していることはできない。
マネジメントは意識的、体系的に、顧客と市場を創造する必要がある。

○マーケティングが、オートメーションという新しい技術の出現から大きな影響を受ける。オートメーションは生産の原理のみではない。
それは、仕事一般の原理である。　メディアはメッセージ

○新しい技術がもたらすものは、競争の激化である。技術の進歩は市場を拡大し、生産と消費の水準を引きあげる。

○新しい技術と社会の要求により、明日の経営管理者は、可能なかぎり雇用を見通し、安定させることが必要となる。

15
74-5

作成日 . .
作成者

29 The Manager of Tomorrow

1 Marketing itself is affected by the basic concepts of the new technology. We have, on the whole, discussed Automation as if it were exclusively a principle of production. It is, however, a principle of work in general.

メディアはメッセージ

新しい技術が要求するもの

[illegible]へ対応すべきもの

メッセージとは活用すべきもの

対応すべきもの

メディアとは オートメーション

新しい技術

"物的" "ソフト的"

~~14~~ 15 - 6

作成日 . .

作成者

1 The new technology will result in greater competition.

True, it will broaden the market and raise the level of production and consumption.

作成日 15-12 . .
作成者

1 What is good for the country must be made to be good for Sears.

2 To make what is good for the country good for the enterprise requires hard work, great management skill, high standards of responsibility and broad vision

ドラッカーへの旅

(H26.12.22)

(知の巨人の思想と人生をたどる)

著者　ジェフリー・A・クレイムズ　訳者　有賀裕子　2009年8月30日発行　ソフトバンク クリエイティブ株式会社発行

第13章　第四次情報革命　(236～頁を読んで)

「**第四次情報革命**が進んでいる。この革命は、企業と個人にとって**情報の意味をすっかり変えてしまうだろう**」とドラッカーは言っている。
　ドラッカーは、**時代の変り目**をことのほか鋭敏に察知する力を身につけ、その時々で別の角度から**歴史の転換点**を眺めている。

　顧客、市場、競合他社など、**外界をよりよく理解するために情報を生かす**企業は、もっぱら内向きの発想で情報を使う企業よりも先を行くことができるはずだ。「IT 分野では、50 年にわたり、データの収集、蓄積、伝送などが中心に据えられていた。IT の T を重視していたのだ。だが、新たな情報革命では I が主役になる筈である」と言う。IT は**データを生み出す**のみであったが、今後は、**情報の提供**を行う筈だ。経営トップの意思決定に**役立つ情報**を提供する、それは、市場を見る、顧客と意見を交わすなど、**組織の外側**で何が起きているかを探ることだ。

　IT は、情報とか人工知能ではない、**世界規模の流通チャンネルとしての役割**を帯びている。即ち、IT が流通チャンネルの主役となるという意味で IT の力は大きい。そして、組織の将来は、**人材を重んじ**、**知識労働者**にかかっており、部下ではなく、エグゼクティブ仲間へと位置づけを改めなければならない。

The Manufacturing Paladox p.263, (p.30)

(1) The relative purchasing power of manufactured goods has fallen by three-quatores in the past forty yeas.
1/4 25%

The purchasing power of workers also gone down.

(2) Japan has owed its rise to great-economic-power status in the second half of the 20th century to becoming the world's manufacturing virtuoso.
(giant)
The decline in manufacturing as the key to economic success confronts Japan with one of the biggest challenges ever.

(3) The decline of manufacturing as producer of wealth and jobs changes the world's economic, social, and political landscape.

15-15

No.

Date

(4) It makes "economic miracles" increasingly dificult for developing countries to achieve.

The economic miracles of the second half of the 20th century — Japan, South Korea, Taiwan, Hong Kong, Sigapore — were based on exports to th world's rich countries of manufactured good that were produced with developed-country technology and productivity but with emerging-country labor costs.

No. 15-16.

Date

Will the Corporation Survive (291)

(1) The corporation invented around 1870,

(2) The following five basic points has been assumed, (of course)

① The corporation is the "master",
the employee is the servant,

② The great majority of employees work "full-time"
for the corporation.

③ The most efficient way to produce anything
is to bring together "under one management"

④ suppliers and especially "manufactures have
market power", because they have information
about a product or service.

⑤ To any one particular "technology pertains one"

No. 15-17

Date

The Paradigm Shift P.273 (40)

① The means of "production is knowledge",
which is owened by knowledge workers,
and is highly portable.

② A growing number of people who work for an
organization will "not be full time" employees
, but part-timers, temporaries, constractors.

③ Now, the most productive and most
profitable way is to disintegrate.
"Outsourcing" has become routine.
According to study by Mckinsey, can save up
to 30% of cost and increase employee satisfaction
as well

④ The customer now has a information

13

ベクトル・行列

平成28年3月28日

本レジュメは、次の各書を参考にさせていただいて作成した。
（行列・ベクトル　佐藤敏明著　2003.11ナツメ社刊）
（実務数学講座テキストⅡ　㈶実務教育研究所）（経済数学早わかり 西村和雄著 860.4.30日本評論社刊）
（経済数学入門 岡部恒治 2000.12.25 新世社発行）.
（行列とベクトルのはなし 大村平著 1983.8.26 日科技連刊）

Ⅰ ベクトル

数を長方形や正方形に並べて、表にすると、状況（共通点や相違点）がわかりやすい。
これを一つのものとして扱う。　　グラフもその一つ。

(1) 行
(2) 列
(3) 成分（2, 3）
(4) 行列（m行×n列）
　　A, B, C…
(5) 数　a, b, c…
(6) スカラー　数そのもの　k
(7) ベクトル　一組の数，1列に並ばせた兵隊

(1) 自然数　1, 2, 3, …
(2) 整　数　自然数 (+) −1, −2, −3, …
(3) 分　数　$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, …
(4) 有理数　整数 (+) 分数
(5) 無理数　分数で表せない
　　面積が2㎡の一辺の長さ
　　$\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$, …
(6) 実　数　有理数 (+) 無理数
(7) 虚　数　二乗して正にならない、マイナスになる数
　　$i^2 = -1$
(8) 複素数　実数 (+) 虚数

$a \in A$　aは集合Aのメンバー　　$a \notin A$　メンバーでない

… $A \cap B$　AとBの共通集合

No.

Date

1. ベクトルとは

数を縦あるいは横に並べて括弧でくくって1組としたもの

ガンモ 1個	1	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
~~コンニャク 2個~~	2	
ハンペン 1個	1	
名称	数字の羅列	答の比較、意味のある数字の集まり 列ベクトル
(i)	(ii)	(iii)

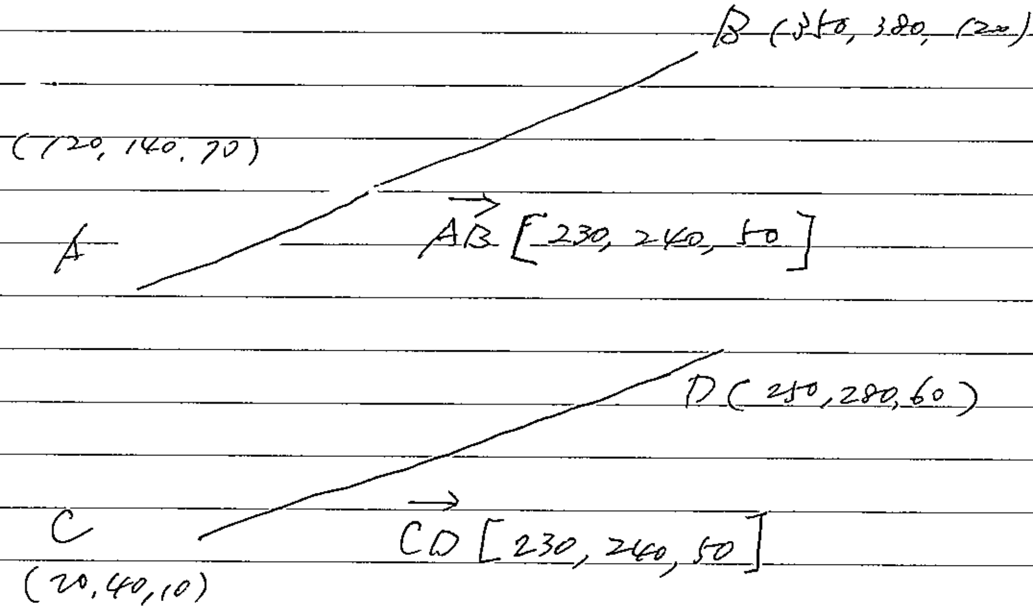
ベクトルは、名称(i)や単なる数字の羅列(ii)ではなく
意味のある数字の集まり(iii)となる。

2.

列ベクトル	縦に並べたもの	転置 transpose T
行ベクトル	横に並べたもの	
成分	カッコ内の数	
次数	カッコ内の数字の個数	
スカラー	数そのもの k	
ベクトル	いくつかの数が1組になっているもの	

3 ベクトル $\overrightarrow{AB}$

座標上の A (120, 140, 70) から B (350, 380, 120) へ
向かう矢印のことを ベクトル $\overrightarrow{AB}$ という。
A をベクトル $\overrightarrow{AB}$ の始点、B をベクトル $\overrightarrow{AB}$ の終点という



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

4 ベクトルの大きさ

ベクトル $\vec{a}$ の矢印としての長さを大きさといい、
$|\vec{a}|$ とかく。

$\vec{a} = [a, b, c]$ ならば、
$|\vec{a}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である

5. 力としてのベクトル

長さ、重さ、力

長さや重さは、それを図る単位を定めれば、1つの数によって表わすことができる。
しかし、**力**は単一の数だけでは十分に表しえない。
例えば、ある物体に**5gの力**を加えると言っても、これだけでは5gの力で押すか、それとも引っぱるのか明確でない。
つまり力を表わすには、大きさを表わす数とともに、それが**作用する向き**をも表示しないと完全ではない。

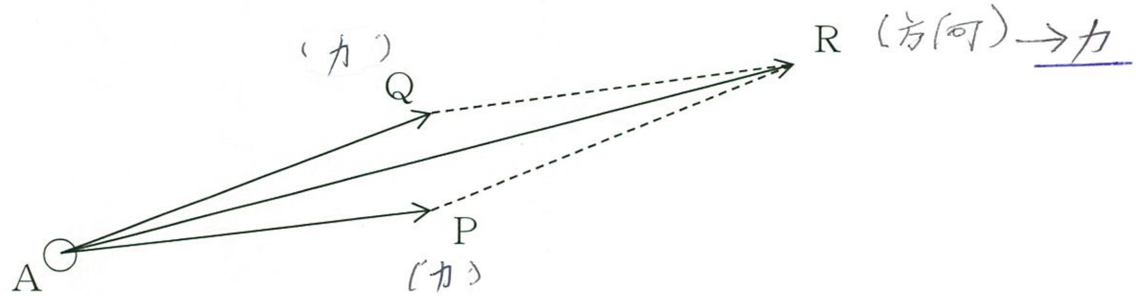
（大きさ）
（方向）
↓
力

ベクトル量＝大きさ＋向き →力
（大きさ）（方向）

スカラー量＝大きさ

（方向）

矢線の長さで力の強さ（ベクトルの大きさ）を表わし、**矢の向き**が力の作用する向きを表す。



PとQという2つの力が、物体Aに作用することは、つまり物体AにRというひとつの力が作用していることになる。

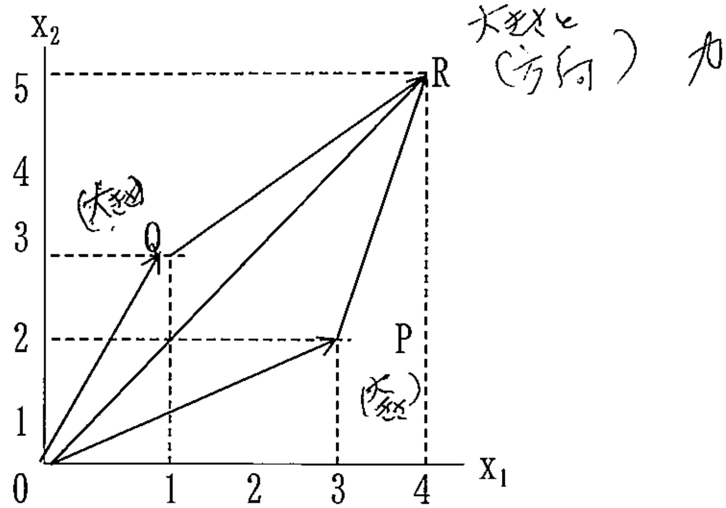
6 時点（当月末、前月末）等の相違なるベクトルを較べると意味が生ずる

A、B、C、各商品の当月末在庫を（120、140、70）として、同品の前月末在庫を（350、380、120）と比較すると、その差は、

（350−120，380−140，120−70）＝（230、240、50）となる。

この間に仕入れがなければ、これは出庫を示し、通常は売上を意味する。

7. 線形代数（ベクトルを代数的に扱う）



P　x_1軸で 3、x_2軸で 2 を　$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$と表現する

Q　　〃　1、　〃　3〃　$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$　　〃

するとRが$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$と得られる。　　$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

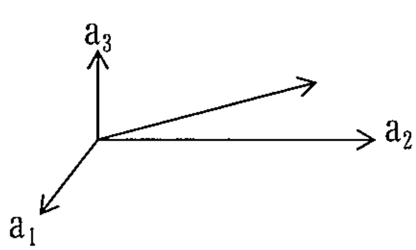
これは、2 頁のNo.3 ということである。

即ち P$=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$、Q$=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$ならば

R$=\begin{pmatrix}P_1+q_1\\P_2+q_2\end{pmatrix}$となる。

8. すなわちベクトルは、図（グラフ）でも代数的でも計算できる。

3 次元の空間の中で矢線を考えると、それは空間内の中の矢線となる。



$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad c=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

6

9. 4次元以上のベクトル

現実の世界は3次元であるが、数学は現実を超えて抽象の世界へ導く。

> **定義1　－ベクトル－**
> ベクトルとは、いくつかの数を1列に並べたものを言う。
> 並んでいる1つ1つの数をベクトルの**成分**といい、並んでいる数の個数をベクトルの**次元**という。

定義＝数学上の約束・・・守らなければならない

n次元のベクトル

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

数学では、ベクトルは単に数が並んでいるものをいう

喫茶店のメニュー

	A店	B店	C店
	円		
コーヒー	80	70	80
ココア	70	70	70
紅茶	100	90	100
ジュース	120	100	120

A店とC店は値段に関して同等である。

> **定義2　－ベクトルの相等－**
> 2つのベクトルが相等しいとは、互いに対応する成分が等しいときをいう。すなわち、2つのベクトルは、
>
> $$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
>
> $a_1 = b_1$、$a_2 = b_2$・・・$a_n = b_n$のとき、そのときに限り相等しいといい、$a = b$と書く。

10. ベクトルの計算

定義 3　－ベクトルの加法－
ベクトル a、b が同一個数の成分をもつとき、つまり次元が等しいとき、相対応する成分の和を成分とするベクトル c を、a と b の和といい、
c＝a＋b と書く。（約束する）

定義 4　－ベクトルのスカラー倍－
ベクトル a を k 倍すると、ベクトル a の成分をすべて k 倍したベクトルをつくることができる。

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{を k 倍したベクトル} \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} =ka$$

であり、これを ka と書く。（約束する）

定義 3 と定義 4 を合わせるとベクトル同士の減法ができる。つまり a－b＝a＋(-1) b である。

定義 5　－ベクトルの内積－
同じ次元の 2 つのベクトルから、相対応する成分の積をつくり、それらすべてを合計したものをベクトルの内積という。つまり、

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad 、\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

であれば、$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$のことを**ベクトル a、b の内積**と呼び、(a, b) で表わす。

縦ベクトルを横ベクトルにする場合には 1 をつける。

$a=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 3 \end{pmatrix}$ならば、$a^1=(1,2,3)$である。

A と b の内積は

$a^1b=(1,2,3)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=1\times2+2\times3+3\times4=20$ である。

No.

Date

11. 内積

それぞれのベクトルの互いに及ぼしあう力の表現が、内積である。

$\vec{a}$, $\vec{d}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき、

$\vec{a}\cdot\vec{d} = |\vec{a}|\,|\vec{d}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{d}$ の内積という

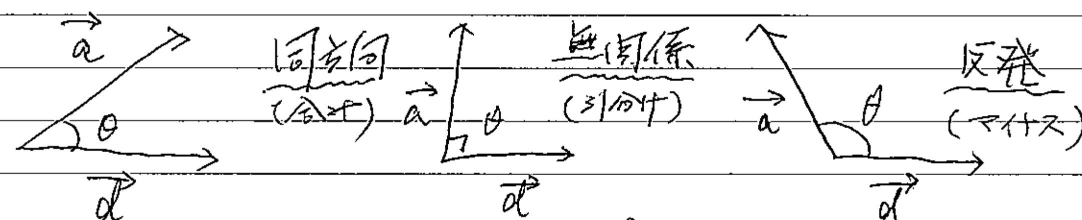
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}|\,|\vec{d}|}$$

内積の性質

① $\vec{a}\cdot\vec{d} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ (θは鋭角)

② $\vec{a}\cdot\vec{d} = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$ (θは直角)

③ $\vec{a}\cdot\vec{d} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ (θは鈍角)



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $[\vec{a} \perp \vec{b}]$

(代数的性質)

$\vec{a} = [a, b, c]$, $\vec{d}\,[d, e, f]$ とする。このとき

④ $\vec{a}\cdot\vec{d} = ad + be + cf$ (成分ごとに掛けて足す)

⑤ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配法則)

⑥ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (交換法則)

12. 内積の代数的性格

(1) トイレットペーパー・ティッシュ・紙タオルの@が k, l, m として
それぞれ 230箱, 240箱, 50箱ずつ仕入れると

$[k, l, m]\cdot[230, 240, 50] = \underline{230k + 240l + 50m}$ となる

(2) 平面上の2点 $A(2,3)$, $B(-3,2)$ がある。 点 $C(-4,9)$ に対して

$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ なる x, y を求めよ

(3) 空間のベクトル $\vec{a} = [1, k, k]$, $\vec{b} = [k, k, 1]$ (ただし $k \neq 0$) が
互いに直交しているとき

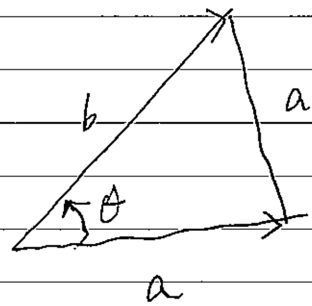
① k の値を求めよ

② $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とに直交し、大きさが3になるベクトルを求めよ

(4) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき、2つのベクトル $\vec{a} = [-2, 1, 2]$ と
$\vec{b}\,[-1, 1, 0]$ のなす角度 θ の値は $\boxed{}$ となる。

ヒント：$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ から $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

14 余弦定理から



$a-b=c$ として

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2ab}$$

$$a^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

$$b^2 = b_1^2 + \cdots + b_n^2$$

$$(a-b)^2 = (a_1-b_1)^2 + \cdots\cdots + (a_n-b_n)^2$$

$$= (a_1^2+\cdots\cdots+a_n^2) - 2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n) + (b_1^2+\cdots b_n^2)$$

$$\cos\theta = \frac{2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)}{2|a||b|} = \frac{(a,b)}{|a|\,|b|}$$

作成日　.　.
作成者

1　ミクロ経済学の消費理論では、所得制約の下で、効用を最大にするように、消費者が需要を決める。

所得制約とは、財の価格を $p\ (p_1, \cdots, p_n)$、財の量を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ というベクトルで、所得 I というスカラーで表わすと、

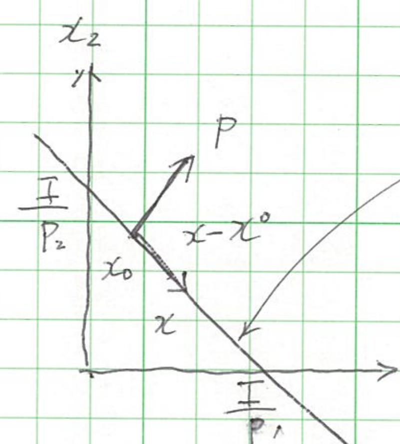
$$p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \leqq I$$ となる。

ここで左辺の値は、p と x の内積 px である。

いま $px = I$ を満たすベクトル x^0 を1つ固定すると、$px = I$ を満たす他の任意のベクトルに対して $px = px^0$、

したがって $p(x - x^0) = 0$ が成り立つ。

このことは、p（財の価格）と $x - x^0$（財の量）が直交していることを意味し、ベクトル p は、$px = I$ で表わされる直線（あるいは平面）に直交する方向を表す。



10-3

作成日 . .
作成者

2　企業の理論では、生産要素xを用いて生産物yが生産されるというプロセスを生産関数$y=f(x)$として表わす。

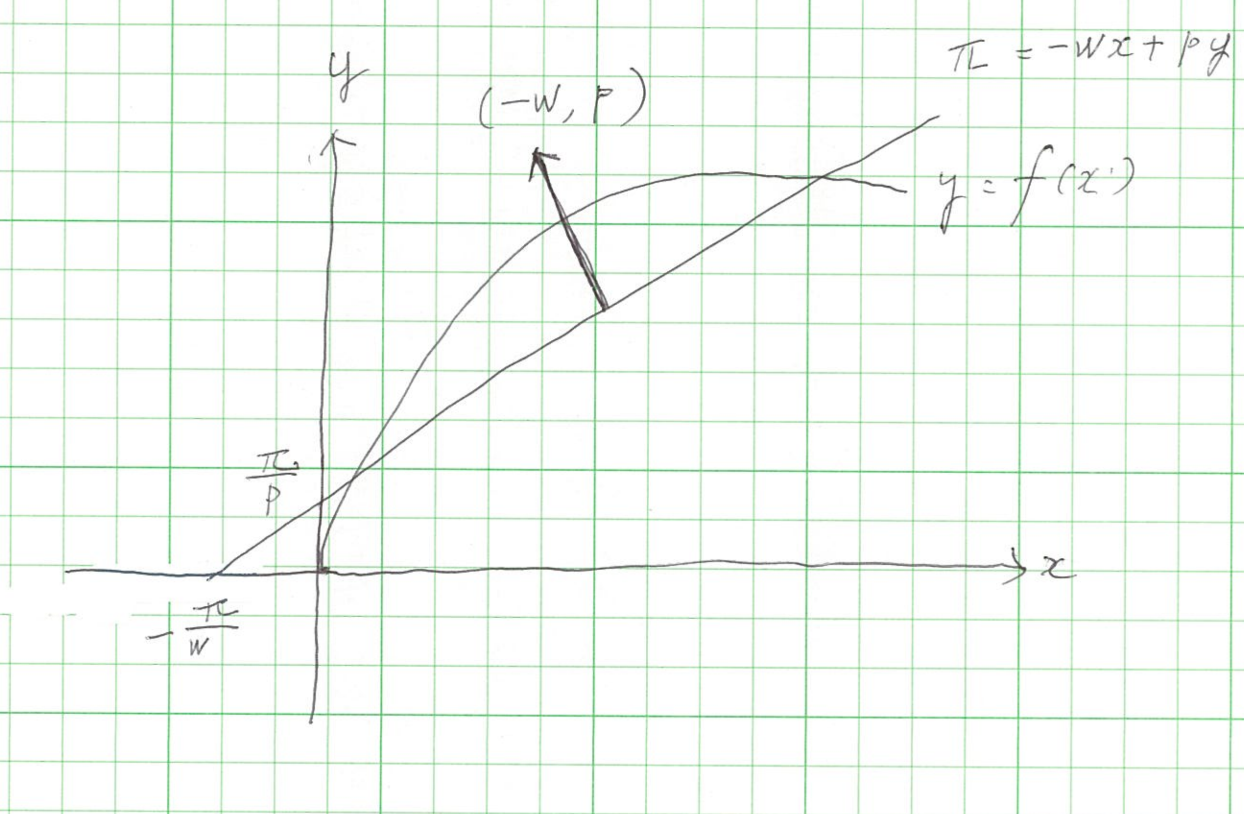
一方、生産物と生産要素の価格をp, wとすると、企業の利潤πは売上pyから、費用wxを差引いたもので、

$\pi = py - wx$　となる

これはベクトルの内積を用いて

$$\pi = (-w, p)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ と書きかえることができる。

従って、企業の利潤直線と直交するベクトルが、$(-w, p)$となっていることがわかる



Ⅱ 行列

行列の計算

	加法（足し算）	乗法（かけ算）
結合法則	(A+B) +C=A+ (B+C)	(AB) C=A (BC)
交換法則	A+B=B+A	**※成立しない**
分配法則	A (B+C) ＝AB+AC (B+C) A=BA+CA	同左 同左
零行列 単位行列	A+0＝0+A=A	AE=EA=A
和の逆元 逆行列	A+ (−A) ＝ (−A) +A＝0	$AA^{-1}＝A^{-1}A＝E$

逆行列

$AA^{-1}＝A^{-1}A＝E$ となる A^{-1} を逆行列という。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は

ad−bc≠0 のとき

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ad−bc=0 のとき存在しない。

ギリシア文字

α アルファ　β ベーター　γ ガンマ　δ デルタ　ε イプシロン

ζ ゼータ　η イータ　θ シータ　κ カッパ　λ ラムダ

κ

μ ミュー　ν ニュー

1 行列

定義6 －行列の定義－
m×n 個の数を、次のように方形に並べたものを行列という。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

そして、横に並んだ n 個の数の組を上から第 1 行、第 2 行・・・第 m 行。縦に並んだ m 個の数を左から第 1 列、第 2 列、・・・第 n 列という。

定義2 －行列の加法－
m 行 n 列の行列Aと、m 行 n 列の行列Bとの和、

C＝A＋B

A，Bの相対応する要素の和となる。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots b_{mn} \end{bmatrix}$$

であれば、

$$C = A + B \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \ldots a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

例．対称する行と列の要素を加える。

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} 、 \quad B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 、 \quad C = A + B\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

定義 3　－行列の乗法－
m 行 n 列の行列Aと n 行 1 列の行列Bとの積ABは、m 行 1 列の行列Cであり、その要素 cij が次のようなものである。
$C_{ij}=a_{i1}\,b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\cdots+a_{in}\,b_{nj}$

例①Aの要素No.1 行を、Bの要素No.1 列に乗する。

$$A\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\qquad B\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}1\times 2+3\times 3 & 1\times 1+3\times 5\\2\times 2+4\times 3 & 2\times 1+4\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 16\\16 & 22\end{pmatrix}$$

例②Aの要素No.行を、Bの要素No.1 列に乗する。

$$A\begin{pmatrix}3 & 2\\6 & 1\end{pmatrix}\qquad B\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}3\times 4+2\times 5\\6\times 4+1\times 5\end{pmatrix}$$

例③Aの要素No.1 行を、Bの要素No.1 列に乗する。

$$A\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}\qquad B\begin{pmatrix}4 & 7\\6 & 8\end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}3\times 4+0\times 6 & 3\times 7+0\times 8\\1\times 4+1\times 6 & 1\times 7+1\times 8\\5\times 4+2\times 6 & 5\times 7+2\times 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 21\\10 & 15\\32 & 51\end{pmatrix}$$

例④Aの要素No.1 行を、Bの要素No.1 列に乗ずる。
(次にNo.2)　　　　(〃)
(〃 No.1)　　　　(No.2)
(〃 No.2)　　　　(〃)

$$A\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\qquad B\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}a_{11}\times b_{11}+a_{12}\times b_{21} & a_{11}\times b_{12}+a_{12}\times b_{22}\\a_{21}\times b_{11}+a_{22}\times b_{21} & a_{21}\times b_{12}+a_{22}\times b_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \overrightarrow{a_{1*}}\cdot\overrightarrow{b_{*1}} & \overrightarrow{a_{1*}}\cdot\overrightarrow{b_{*2}} & \overrightarrow{a_{1*}}\cdot\overrightarrow{b_{*3}} \\ \overrightarrow{a_{2*}}\cdot\overrightarrow{b_{*1}} & \overrightarrow{a_{2*}}\cdot\overrightarrow{b_{*2}} & \overrightarrow{a_{2*}}\cdot\overrightarrow{b_{*3}} \\ \overrightarrow{a_{3*}}\cdot\overrightarrow{b_{*1}} & \overrightarrow{a_{3*}}\cdot\overrightarrow{b_{*2}} & \overrightarrow{a_{3*}}\cdot\overrightarrow{b_{*3}} \end{bmatrix}$$

どうして掛け算をあのように面倒な形にするのであろうか。

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix} \quad \text{について} \quad A\times B=\begin{bmatrix} ar & ct \\ bs & du \end{bmatrix}$$

とすれば，ラクなのに。こういう疑問が起こって当然だろう。これに答えるために，次の例からみていこう。

例 2.9

次の連立方程式の合成を考える。

$$\begin{cases} p=rx+ty \\ q=sx+uy \end{cases} \qquad \cdots\cdots①$$

なる連立方程式と（x，y が未知数），

$$\begin{cases} m=ap+cq \\ n=bp+dq \end{cases} \qquad \cdots\cdots②$$

という連立方程式（p，q が未知数，）が与えられたとき，m，n から p，q を求め，その p，q から x，y を求めることになる。

①と②の連立方程式の係数の表を，それぞれ，

$$B=\begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix} \qquad \text{と} \quad A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{とおく。}$$

前の式①を②に代入すると，m，n から x，y を直接求める式になる。実際，

$$\begin{cases} m=a(rx+ty)+c(sx+uy)=(ar+cs)x+(at+cu)y \\ n=b(rx+ty)+d(sx+uy)=(br+ds)x+(bt+du)y \end{cases}$$

この最後の式の係数表の行列は

$$\begin{bmatrix} ar+cs & at+cu \\ br+ds & bt+du \end{bmatrix}$$

これはまさしく，$A\times B$ の行列である。

上の例の r，s，t，u，a，b，c，d に具体的な値を入れた例をみておこう。

例 2.10

金属Xは金属P，Qの合金で，PとQの重量比が5：1である。また，金属Yも金属P，Qの合金で，PとQの重量比が2：1である。

このとき，金属Xの x kg の中には，Pが $\frac{5}{6}x$ kg，Qが $\frac{1}{6}x$ kg 含まれ，また，金属Yの y kg の中には，Pが $\frac{2}{3}y$ kg，Qが $\frac{1}{3}y$ kg 含まれている。この2つの合金X，Yをそれぞれ x kg，y kg ずつ混ぜて溶かすと，その中には，Pが $\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}y$ (kg) 含まれ，Qが $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y$ (kg) 含まれる。これを行列で表現すると，

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

となる。

さらに，金属Pが金属M，Nの合金で，MとNの重量比が2：3であり，金属Qも金属M，Nの合金で，MとNの重量比が3：7とする。このとき，Pを p kg，Qを q kg 混ぜて溶かすと，その中には，Mが $m=\frac{2}{5}p+\frac{3}{10}q$ (kg) 含まれ，Nが $n=\frac{3}{5}p+\frac{7}{10}q$ (kg) 含まれる。これを行列で表現すると，

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \right)$$

となる。

このとき，X，Y をそれぞれ x kg，y kg ずつ混ぜて溶かすと，その中に，M，N がどれだけ含まれるかは，例2.9によって，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right\} \times \left\{ \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 23 & 22 \\ 37 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

たとえば，M が10 kg，N が17 kg の重量を含むようにするには，X と Y をどれくらいずつ混ぜればよいかという問題は，次の連立方程式になるのである。

$$\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 23 & 22 \\ 37 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\text{つまり，} \begin{cases} \frac{23}{60}x + \frac{22}{60}y = 10 \\ \frac{37}{60}x + \frac{38}{60}y = 17 \end{cases}$$

行列の掛け算 $A \times B$ の意味を連立方程式だけから考えてきたが，対応とみる方向からは，次のようにも説明できる。

▶性質 2.1

行列 B が $[x,\ y]$ を $[p,\ q]$ に，A が $[p,\ q]$ を $[z,\ w]$ に移すとする。このとき，$A \times B$ は $[x,\ y]$ を $[z,\ w]$ に移す。

17 ~20

条件より，

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx+ty \\ sx+uy \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+cq \\ bp+dq \end{bmatrix}$$

ここの p，q に①の値を代入して，

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+cq \\ bp+dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(rx+ty)+c(sx+uy) \\ b(rx+ty)+d(sx+uy) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ar+cs)x+(at+cu)y \\ (br+ds)x+(bt+du)y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ar+cs & at+cu \\ br+ds & bt+du \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \times B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

このことから，

$$A\left\{ B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} = A \times B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

が成り立つ。というよりは，これを成り立たせるために，
掛け算を定義2.6のように定義したと考えることができる。

同じことは，3 × 3 の行列，4 × 4 の行列についても，すべての正方行列について言える。

たとえば，3 × 3 の場合は，

$$A\left\{ B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = A \times B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

となる。

Ⅲ．連立方程式

1. 連立一次方程式

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_n = b_1$ … (1)
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_n = b_2$ … (2)

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_n = b_m$ … (3)

係　数…a_{11}、a_{ij}
定数項…b_1、b_i
変　数…x_1、x_m

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$　であり
上記の (1) は、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_1$

(2) は、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_2$

---

(3) は、$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m$
とかける。
代表として$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = 1,2,\ldots,m)$

2. 連立方程式の表現法

(1) ベクトルによる表現

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = P_1$ (ツル 頭1つに足2本)　$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = P_2$ (カメ 頭1つに足4本)　$\begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix} = P_0$とおけば、

$P_1x_1 + P_2x_2 = P_0$とかける。

一般的には

$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = P_0$　又は、$\sum_{j=1}^{n} P_jx_j = P_0$
とかける。

(2) 行列による表現

行列で書けば、

$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix}$　となる。

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$　$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix}$

とすればＡＸ＝Ｂとなる。
これは連立方程式を１次方程式で表現したことになる。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば、
ＡＸ＝Ｂと書ける。